ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Июнь 2011** **Выпуск 58. С. 59–68**

Д. Борисов
Башкирский государственный
педагогический университет, Уфа, Россия
borisovdi@yandex.ru

Р. Бюнуау
Университет Поля Верлена, Мец, Франция
bunoiu@univ-metz.fr

Дж. Кардоне
Университет Саннио, Беневентно, Италия
giuseppe.cardone@unisannio.it

# УСРЕДНЕНИЕ И АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ВОЛНОВОДА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ МАЛЫХ ОКОН

*Посвящается нашему коллеге В. В. Жикову*
*в связи с его семидесятилетием,*
*советы которого всегда неоценимы*

Рассматривается плоский волновод, моделируемый лапласианом в бесконечной полосе с граничным условием Дирихле на верхней границе и часто меняющимися граничными условиями (Дирихле и Неймана) на нижней границе. Усредненный оператор является лапласианом с граничными условием Дирихле на верхней границе и условием Дирихле или Неймана на нижней границе. Мы доказываем равномерную резольвентную сходимость для возмущенного оператора в обоих случаях и выводим оценки скорости сходимости. Кроме того, мы строим главные члены асимптотических разложений для первых зонных функций и полное асимптотическое разложение для нижнего края спектра. Библиография: 17 назв. Иллюстрации: 3 рис.

## 1. Введение

Данная работая представляет обзор результатов из [**1**]–[**3**], где рассматривалась модель квантового волновода с бесконечным числом окон. Эта модель была предложена в [**3**]. Рассматривается оператор Лапласа В прямой полосе с граничным условием Дирихле Всюду, кроме окон. Окна расположены на нижней границе полосы и соответствуют бесконечному периодическому множеству малых отрезков, расположенных близко друг к другу. На этих окнах ставится условие

Первый автор частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант No. 09-01-00530), грантами Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (МД-453.2010.1) и для ведущих научных школ (НШ-6249.2010.1), а также Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт 02.740.11.0612).

Неймана. Эта математическая задача является моделью волновода с частым чередованием граничных условий, что является сингулярным возмущением из теории усреднения для ограниченных областей, как в [**4**]–[**8**] (см. библиографии там же). Эту модель можно рассматривать как два симметричных волновода, связанных бесконечной периодической системой окон. Волноводы с конечным числом окон интенсивно изучались (см., например, [**9**]–[**11**] и библиографию там же), и с такой точки зрения представляется совершенно естественным изучение задач с бесконечным числом окон.

Полученные здесь результаты имеют ряд отличий относительно результатов уже известных. Главное отличие от задач в [**4**]–[**8**] заключается в том, что в случае неограниченной области имеем нетривиальный существенный спектр. Кроме того, в [**11**], например, основным изучаемым явлением было появление новых дискретных собственных значений ниже порога существенного спектра. Сам существенный спектр оставался без изменений и не ощущал наличия окон. В нашем случае ситуация значительно отличается, так как существенный спектр чувствителен к окнам и превращается в зонный спектр.

В данной статье рассматриваются два случая: модель, в которой предполагается, что усредненный оператор имеет условие Дирихле на нижней границе вместо чередующихся условий, и модель, в которой усредненный оператор имеет условие Неймана на нижней границе. Наши основные результаты: равномерная резольвентная сходимость и оценка скорости сходимости, двучленные асимптотические разложения для первых зонных функций и полное двухпараметрическое разложение для нижнего края спектра.

Важное различие между этими двумя случаями заключается в оценках скорости сходимости для возмущенной резольвенты. Хорошая оценка была получена в [**3**] для разности возмущенной и усредненной резольвент, рассматриваемых как операторы из $L_2$ в $W_2^1$. В [**1**] аналогичная хорошая оценка получена лишь с помощью граничного корректора и при этом разность возмущенной резольвенты и резольвенты модельного оператора все еще зависела от малого параметра. Не используя корректор или рассматривая усредненную резольвенту, мы получим более плохую скорость сходимости. Такая ситуация похожа на ту, которая возникает при усреднении операторов с быстро осциллирующими коэффициентами в неограниченных областях (см., например, [**12, 13**]).

Другое важное различие между этими двумя случаями связано с асимптотикой нижнего края спектра. Действительно, во втором случае асимптотика состоит из главного члена с экспоненциально малой погрешностью. Показано, что этот член является голоморфной функцией от малых параметров, характеризующих чередование. Это означает, что асимптотики для нижнего края спектра могут быть суммированы. Этот результат является совершенно новым для задач с частым чередованием граничных условий. Действительно, в предшествующих работах (см., например, [**4, 8**]) все разложения были лишь асимптотическими.

## 2. Постановка задачи

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$ и $\Omega := \{x : 0 < x_2 < \pi\}$ — полоса ширины $\pi$. Обозначим через $\varepsilon$ малый положительный параметр и через $\eta = \eta(\varepsilon)$ — функцию со значениями в $(0, \pi/2)$. Обозначим через $\Gamma_+$ и $\Gamma_-$ верхнюю и нижнюю границы $\Omega$, разобьем $\Gamma_-$ на два подмножества $\gamma_\varepsilon := \{x : |x_1 - \varepsilon\pi j| < \varepsilon\eta,\ x_2 = 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$ и $\Gamma_\varepsilon := \Gamma_- \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$ (см. рис. 1). Обозначим через $\mathscr{H}_\varepsilon$ лапласиан в $L_2(\Omega)$, подчиненный граничному условию Дирихле на $\Gamma_+ \cup \gamma_\varepsilon$ и граничному условию Неймана на $\Gamma_\varepsilon$. Этот оператор определяется как самосопряженный в $L_2(\Omega)$, ассоциированный с полуторалинейной формой $(\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}$ на $\mathring{W}_2^1(\Omega, \Gamma_+ \cup \gamma_\varepsilon)$, где $\mathring{W}_2^1(Q, S)$ — подмножество функций из $W_2^1(Q)$ с нулевым следом на поверхности $S$. Наша цель — изучить асимптотическое поведение резольвенты и спектра $\mathscr{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to +0$.

Рассмотрим два случая значения предела $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. В первом случае

$$\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.1}$$

В этом случае усредненным оператором будет $\mathscr{H}_D := -\Delta$ в $L_2(\Omega)$ С граничным условием Дирихле на верхней и нижней границах полосы. Этот случай называется в дальнейшем случаем Дирихле (см. рис. 2).

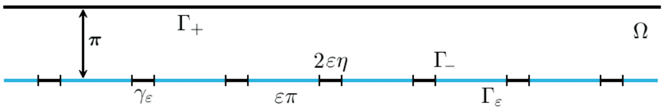


Рис. 1. Волновод с чередующимися граничными условиями: условие Неймана на серых сегментах и условие Дирихле на черных.


Рис. 2. Волновод с условием Дирихле на нижней границе

Во втором случае

$$\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to -\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.2}$$

В этом случае усредненным оператором будет оператор $\mathscr{H}_N := -\Delta$ в $L_2(\Omega)$ с граничным условием Дирихле на верхней границе и граничным условием Неймана на нижней границе полосы. Этот случай будем называть случаем Неймана (см. рис. 3).


Рис. 3. Волновод с условием Неймана на нижней границе

Для полного исследования задачи надо рассмотреть также третий случай:

$$\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to -A \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $A$ — строго положительная вещественная константа. Здесь усредненная задача будет включать граничное условие Робина на нижней границе волновода. На самом деле, этот случай наиболее сложный. Дело в том, что для ограниченной области, как известно, в случае усредненного граничного условия Робина даже сильная резольвентная сходимость не имеет места. Поэтому в этом случае надо использовать граничные корректоры с тем, чтобы получить равномерную резольвентную сходимость. Следует ожидать, что другие результаты в этом случае также довольно сложные. Работа по этим направлениям ведется, и соответствующие результаты будут опубликованы в последующей статье.

Мы представим основные результаты, полученные для двух случаев, и укажем идеи доказательства лишь для случая условия Неймана, так как этот случай более сложный, чем условия Дирихле.

## 3. Резольвентная сходимость

Обозначим через $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)}$ норму оператора, действующего из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и в $W_2^1(\Omega)$ соответственно.

В случае Дирихле получаем следующий результат.

**Теорема 3.1** (случай Дирихле)**.** *Предположим, что справедливо* (2.1). *Тогда*

$$\|(\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} - (\mathscr{H}_D - \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{13}\,\varepsilon^{1/4} |\ln \sin \eta(\varepsilon)|^{1/4}.$$

Чтобы получить аналогичные хорошие оценки во втором случае, надо ввести оператор $\mathscr{H}_N^{(\mu)}$, который является неотрицательным самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$, ассоциированным с полуторалинейной формой

$$\mathfrak{h}_N^{(\mu)}[u,v] := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} + \mu(u,v)_{L_2(\partial\Omega)} \quad \text{на} \quad \mathring{W}_2^1(\Omega, \Gamma_+),$$

где $\mu \geqslant 0$ — константа. Можно показать, что область определения $\mathscr{H}_N^{(\mu)}$ состоит из функций в $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - \mu u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_-, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_+,$$

и

$$\mathscr{H}_N^{(\mu)} u = -\Delta u.$$

Кроме того, во втором случае нам надо построить граничный корректор для вывода хороших оценок. В этом заключается главное отличие от первого случая.

Во втором случае справедлив следующий результат.

**Теорема 3.2** (случай Неймана). *Пусть справедливо* (2.2) *и* $\mu := -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} \to +0$. *Тогда*

$$\|(\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} - (\mathscr{H}_N - \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)} \leqslant C\mu,^{1/2} \tag{3.1}$$

$$\|(\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} - (\mathscr{H}_N - \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C\mu, \tag{3.2}$$

$$\|(\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} - (\mathscr{H}_N^{(\mu)} - \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon\mu|\ln \varepsilon\mu|, \tag{3.3}$$

*где константа $C$ не зависит от $\varepsilon$ и $\mu$.*

*Существует корректор $W = W(x,\varepsilon,\mu)$, определенный в явном виде формулой* (3.6) *ниже, такой, что*

$$\|(\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} - (1+W)(\mathscr{H}_N^{(\mu)} - \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon\mu|\ln \varepsilon\mu|, \tag{3.4}$$

*где константа $C$ не зависит от $\varepsilon$ и $\mu$.*

Далее мы укажем основные идеи доказательства резольвентной сходимости в случае условий Неймана. Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Обозначим

$$u_\varepsilon := (\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} f,$$
$$u^{(\mu)} := (\mathscr{H}_N^{(\mu)} - \mathrm{i})^{-1} f.$$

Основные идеи доказательства следующие.

- сначала мы строим специальный корректор $W = W(x,\varepsilon,\mu)$,
- затем мы оцениваем нормы $v_\varepsilon := u_\varepsilon - (1+W)u^{(\mu)}$ и $u^{(\mu)}W$.

Функция $W$ строится таким образом, чтобы она отражала геометрию чередования граничных условий в возмущенном оператора, и именно по этой причине проще оценить независимо $v_\varepsilon$ и $u^{(\mu)}W$, чем стараться проделать это для $u_\varepsilon - u^{(\mu)}$ и $u_\varepsilon - u^{(0)}$.

Первым основным ингредиентом является следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Пусть $W = W(x,\varepsilon,\mu)$ — $\varepsilon\pi$-периодическая по $x_1$ функция из $C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{x : x_2 = 0,\, x_1 = \pm\varepsilon\eta + \varepsilon\pi n,\, n \in \mathbb{Z}\})$, удовлетворяющая граничным условиям*

$$W = -1 \quad \textit{на} \quad \gamma_\varepsilon,$$
$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = -\mu \quad \textit{на} \quad \Gamma_\varepsilon,$$

*и имеющая дифференцируемую асимптотику*

$$W(x,\varepsilon,\mu) = c_\pm(\varepsilon,\mu) r_\pm^{1/2} \sin\frac{\theta_\pm}{2} + \mathscr{O}(\rho_\pm), \quad r_\pm \to +0.$$

*Здесь $(r_\pm, \theta_\pm)$ — полярные координаты с центром $(\pm\varepsilon\eta, 0)$ такие, что значения $\theta_\pm = 0$ соответствуют точкам на $\gamma_\varepsilon$. Предположим, что $\Delta W \in C(\overline{\Omega})$. Тогда $(1+W)u^{(\mu)}$ принадлежит $\mathring{W}_2^1(\Omega, \Gamma_+ \cup \gamma_\varepsilon)$ и*

$$\begin{aligned}\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + \mathrm{i}\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} &= (f, v_\varepsilon W)_{L_2(\Omega)} + (u^{(\mu)}\Delta W, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - 2\mathrm{i}(u^{(\mu)}W, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} \\ &\quad - 2(W\nabla u^{(\mu)}, \nabla v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - \mu(u^{(\mu)}, W v_\varepsilon)_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для доказательства нашего результата мы построим корректор $W$, удовлетворяющий условиям леммы 3.1, и затем оценим члены в правой части (3.5).

Мы строим функцию $W$ методом пограничных слоев [**14**] и методом согласования асимптотических разложений [**15**]. Функция $W$ выписывается в явном виде

$$\begin{aligned} W(x,\varepsilon,\mu) = & -\mu x_2 + \varepsilon\mu(X(\xi)+\xi_2)\prod_{j=-\infty}^{+\infty}\big(1-\chi\big(|\varsigma^{(j)}|\eta^\alpha\big)\big) \\ & + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\chi\big(|\varsigma^{(j)}|\eta^\alpha\big)\big(-1+\varepsilon\mu Y(\varsigma^{(j)})\big), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\alpha \in (0,1)$ — любая фиксированная константа и $\chi = \chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезка, принимающая значения в $[0,1]$ и равная 1 при $t < 1$ и 0 при $t > 3/2$. Здесь

$$\xi = (\xi_1,\xi_2) = x\varepsilon^{-1}, \quad \varsigma^{(j)} = (\varsigma_1^{(j)},\varsigma_2^{(j)}), \quad \varsigma_1^{(j)} = (\xi_1 - \pi j)\eta^{-1}, \quad \varsigma_2^{(j)} = \xi_2\eta^{-1},$$

$$X(\xi) := \operatorname{Re}\ln\sin(\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2) + \ln 2 - \xi_2, \quad Y(\varsigma) := \operatorname{Re}\ln(z+\sqrt{z^2-1}), \quad z = \varsigma_1 + \mathrm{i}\varsigma_2.$$

Как уже говорилось, следующий шаг — оценка $W$ для контроля членов в правой части (3.5). Этот шаг проделан в следующих трех вспомогательных леммах. Для любого заданного $\delta \in (0,\pi/2)$ обозначим

$$\Omega^\delta := \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}\Omega_j^\delta, \quad \Omega_j^\delta := \{x : |x-(\pi j,0)| < \varepsilon\delta\} \cap \Omega.$$

**Лемма 3.2.** *Для любых $u \in W_2^1(\Omega)$ и $\delta \in (0,\pi/4)$*

$$\|u\|_{L_2(\Omega^\delta)} \leqslant C\delta\big(|\ln\delta|^{1/2}+1\big)\|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$

*где константа $C$ не зависит от $\delta$ и $u$.*

**Лемма 3.3.** *Для любых $u \in W_2^2(\Omega)$ и $\delta \in (0,\pi/2)$*

$$\|u\|_{L_2(\gamma_\varepsilon^\delta)} \leqslant C\delta^{1/2}\|u\|_{W_2^2(\Omega)},$$

*где*

$$\gamma_\varepsilon^\delta := \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}\{x : |x_1 - \varepsilon\pi j| < \varepsilon\delta,\ x_2 = 0\}$$

*и константа $C$ не зависит от $\varepsilon$, $\delta$, и $u$.*

Теперь мы можем привести оценки корректора $W$.

**Лемма 3.4.** *Справедливы следующие оценки:*

$$|\Delta W| \leqslant C\varepsilon^{-1}\mu(1+\eta^{4\alpha-2}), \quad x \in \Omega,$$

$$|W| \leqslant C\varepsilon\mu(|\ln\delta|+1), \quad x \in \Omega\setminus\Omega^\delta, \quad \frac{3}{2}\eta^\alpha < \delta < \frac{\pi}{2},$$

$$|W| \leqslant C, \quad x \in \Omega^\delta, \quad \frac{3}{2}\eta^\alpha < \delta < \frac{\pi}{2},$$

*где константа $C$ не зависит от $\varepsilon$, $\mu$, $\eta$, $\delta$, $x$.*

Воспользовавшись леммами 3.2, 3.3, 3.4 соответствующим образом выбранным параметром $\delta$, а также леммой 3.1, получаем (3.4).

Для доказательства (3.3) используем оценку

$$\|u^{(\mu)}W\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon\mu|\ln\delta| + \delta|\ln\delta|^{1/2} + \delta)\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

с $\delta = \varepsilon\mu$ и уже доказанную оценку (3.4). Воспользовавшись (3.4) и оценками

$$\|\nabla(u^{(\mu)}W)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\mu^{1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\|u^{(\mu)}W\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon\mu|\ln\delta| + \delta|\ln\delta|^{1/2} + \delta)\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

получаем

$$\|(\mathscr{H}_\varepsilon - \mathrm{i})^{-1} - (\mathscr{H}_N^{(\mu)} - \mathrm{i})^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)} \leqslant C\mu^{1/2}.$$

Из всех предыдущих оценок получаем (3.1) и (3.2), что завершает доказательство равномерной сходимости резольвент.

Результат о равномерной сходимости резольвент был также использован для доказательства сходимости спектра. Спектры усредненных операторов имеют вид

$$\sigma(\mathscr{H}_D) = [1, +\infty), \quad \sigma(\mathscr{H}_N) = [1/4, +\infty).$$

Спектр $\mathscr{H}_\varepsilon$ сходится к спектру $\mathscr{H}_N$ в обычном смысле: если $\lambda \notin \sigma(\mathscr{H}_\natural)$, $\natural = N, D$, то $\lambda \notin \sigma(\mathscr{H}_\varepsilon)$. Если $\lambda \notin \sigma(\mathscr{H}_\natural)$, то существует $\lambda_\varepsilon \in \sigma(\mathscr{H}_\varepsilon)$ такое, что $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ при $\varepsilon \to +0$. Мы имеем также сходимость спектральных проекторов в равномерной норме.

## 4. Асимптотика зонных функций

Оператор $\mathscr{H}_\varepsilon$ периодический, поскольку множества $\gamma_\varepsilon$ и $\Gamma_\varepsilon$ периодические. Мы применим разложение Флоке — Блоха для изучения его спектра. Положим

$$\Omega_\varepsilon := \{x : |x_1| < (\varepsilon\pi)/2, 0 < x_2 < \pi\}, \quad \mathring{\gamma}_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \cap \gamma_\varepsilon, \quad \mathring{\Gamma}_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \cap \Gamma_\varepsilon, \quad \mathring{\Gamma}_\pm := \partial\Omega_\varepsilon \cap \Gamma_\pm.$$

Обозначим через $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau)$ самосопряженный неотрицательный оператор в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, ассоциированный с полуторалинейной формой

$$\mathring{\mathfrak{h}}_\varepsilon(\tau)[u,v] := \left(\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\tau}{\varepsilon}\right)u, \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\tau}{\varepsilon}\right)v\right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$$

на $\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon, \mathring{\Gamma}_+ \cup \mathring{\gamma}_\varepsilon)$, где $\tau \in [-1, 1)$.

Здесь $\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon, \mathring{\Gamma}_+ \cup \mathring{\gamma}_\varepsilon)$ — множество функций в $\mathring{W}^1_2(\Omega_\varepsilon, \mathring{\Gamma}_+ \cup \mathring{\gamma}_\varepsilon)$ удовлетворяющих периодическим граничным условиям на боковых границах $\Omega_\varepsilon$. Оператор $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau)$ имеет компактную резольвенту, поскольку он ограничен как оператор, действующий из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ и пространство $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ компактно вложено в $L_2(\Omega_\varepsilon)$. Следовательно, спектр $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau)$ имеет лишь дискретную часть. Обозначим через $\lambda_n(\tau,\varepsilon)$ собственные значения $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau)$ и упорядочим их в порядке возрастания с учетом кратности:

$$\lambda_1(\tau,\varepsilon) \leqslant \lambda_2(\tau,\varepsilon) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\tau,\varepsilon) \leqslant \ldots$$

Эти собственные значения являются зонными функциями. В **[3]** мы доказали, что

$$\sigma(\mathscr{H}_\varepsilon) = \sigma_e(\mathscr{H}_\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n(\tau,\varepsilon) : \tau \in [-1,1)\},$$

где $\sigma(\cdot)$ и $\sigma_e(\cdot)$ обозначают спектр и вещественный спектр оператора. Последнее тожество верно, независимо от поведения $\eta(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$.

В случае Дирихле асимптотика зонных функций определяется следующим утверждением.

**Теорема 4.1** (случай Дирихле)**.** *Предположим, что справедливо* (2.1). *Пусть* $|\tau| < 1 - \varkappa$, $0 < \varkappa < 1$ *— фиксированная константа. Тогда для любого заданного* $N > 0$ *при* $\varepsilon < 2\varkappa^{1/2}N^{-1}$ *зонные функции* $\lambda_n(\tau,\varepsilon)$, $n = 1, \ldots, N$, *удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda_n(\tau,\varepsilon) = \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} + n^2 + R_n(\tau,\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0,$$

$$|R_n(\tau,\varepsilon)| \leqslant n^4 \frac{\sqrt{2}\varepsilon + 8\varepsilon^{1/2}|\ln\sin\eta(\varepsilon)|^{1/2}}{\varkappa^{1/2}}.$$

В случае Неймана аналогичные результаты формулируются следующим образом.

**Теорема 4.2** (случай Неймана)**.** *Предположим, что справедливо* (2.2)*. Пусть* $|\tau| < 1 - \varkappa$, $0 < \varkappa < 1$ *— фиксированная константа,* $\mu := -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} \to +0$*. Тогда для любого заданного* $N > 0$ *при* $\varepsilon < 2\varkappa^{1/2} N^{-1}$ *зонные функции* $\lambda_n(\tau, \varepsilon)$, $n = 1, \dots, N$, *удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered} \lambda_n(\tau, \varepsilon) = \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} + \Lambda_n(\mu) + R_n(\tau, \varepsilon, \mu), \\ |R_n(\tau, \varepsilon, \mu)| \leqslant C \varkappa^{-1/2} n^4 \varepsilon^{1/2} \mu, \end{gathered} \tag{4.1}$$

*где* $\Lambda_n(\mu)$, $n = 1, \dots, N$, *–0- первые* $N$ *корней уравнения*

$$\sqrt{\Lambda} \cos \sqrt{\Lambda} \pi + \mu \sin \sqrt{\Lambda} \pi = 0, \tag{4.2}$$

*голоморфны относительно* $\mu$ *и*

$$\Lambda_n(\mu) = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\mu}{\pi(n - 1/2)} + \mathscr{O}(\mu^2). \tag{4.3}$$

Как следствие этих теорем получаем следующий результат о длине первой зоны в спектре.

**Следствие 4.1.** *Длина первой зоны в спектре оператора* $\mathscr{H}_\varepsilon$ *имеет порядок не меньше, чем* $\mathscr{O}(\varepsilon^{-2})$.

Доказательства теорем 4.1 и 4.2 близки по духу, но во втором случае нам надо опять использовать корректор $W$. Ниже мы изложим основные идеи доказательства в случае Неймана.

Сначала введем самосопряженный неотрицательный оператор в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, ассоциированный с полуторалинейной формой

$$\mathring{\mathfrak{h}}_\varepsilon(\tau)[u, v] := \left(\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) u, \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) v\right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$$

на $\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon, \mathring{\Gamma}_+ \cup \mathring{\gamma}_\varepsilon)$, где $\tau \in [-1, 1)$, который обозначим через $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau)$. Пусть $\mathfrak{L}_\varepsilon$ — подпространство $L_2(\Omega_\varepsilon)$, состоящее из функций, не зависящих от $x_1$. Определим разложение

$$L_2(\Omega_\varepsilon) = \mathfrak{L}_\varepsilon \oplus \mathfrak{L}_\varepsilon^\perp,$$

где $\mathfrak{L}_\varepsilon^\perp$ — ортогональное дополнение $\mathfrak{L}_\varepsilon$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

Пусть $\mathscr{G}_\mu$ — самосопряженный неотрицательный оператор в $\mathfrak{L}_\varepsilon$, ассоциированный с полуторалинейной формой

$$\mathfrak{g}[u, v] := \left(\frac{du}{dx_2}, \frac{dv}{dx_2}\right)_{L_2(0,\pi)} + \mu u(0)\overline{v(0)} \quad \text{на} \quad \mathring{W}^1_2((0, \pi), \{\pi\}),$$

т.е. $\mathscr{G}_\mu$ — оператор $-\dfrac{d^2}{dx_2^2}$ в $L_2(0, \pi)$, область определения которого состоит из функций в $W^2_2(0, \pi)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(\pi) = 0, \quad u'(0) - \mu u(0) = 0.$$

Отметим, что собственные значения $\mathscr{G}_\mu$ суть в точности $\Lambda_n(\mu)$.

Основной шаг доказательства — это равномерная резольвентная сходимость операторов $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon$, которая описывается в следующем утверждении.

**Теорема 4.3.** *Пусть* $|\tau| < 1 - \varkappa$, *где* $0 < \varkappa < 1$ *— фиксированная константа, и пусть справедливо* (2.2)*. Тогда для достаточно малого* $\varepsilon$

$$\left\| \left(\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau) - \frac{\tau^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1} - \mathscr{Q}_\mu^{-1} \oplus 0 \right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \to L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C \varkappa^{-1/2} (\varepsilon^{1/2} \mu + \varepsilon),$$

*константа* $C$ *не зависит от* $\varepsilon$, $\mu$, $\varkappa$.

Воспользовавшись [**16**, гл. 13, § 15, предложение 4], мы докажем, что

$$\frac{1}{4} \leqslant \lambda_n(\tau, \varepsilon) - \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} \leqslant n^2, \quad n < 2\varkappa^{1/2} \varepsilon^{-1}, \tag{4.4}$$

и покажем, что

$$0 \leqslant \Lambda_n(\mu) \leqslant n^2 \tag{4.5}$$

равномерно в $\mu$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Затем, используя результаты, полученные в **[1]** для оператора $\mathring{\mathscr{H}}_\varepsilon(\tau)$ , общий результат о сравнении из **[17]** и соотношения (4.4), (4.5), получаем

$$\left|\frac{1}{\lambda_n(\tau,\varepsilon)-\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}}-\frac{1}{\Lambda_n(\mu)}\right| \leqslant C\varkappa^{-1/2}\varepsilon^{1/2}\mu,$$

$$\begin{aligned}\left|\lambda_n(\tau,\varepsilon)-\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}-\Lambda_n(\mu)\right| &\leqslant C\varkappa^{-1/2}(\mu\varepsilon^{1/2}+\varepsilon)|\Lambda_n(\mu)|\left|\lambda_n(\tau,\varepsilon)-\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}\right| \\ &\leqslant Cn^4\varkappa^{-1/2}(\mu\varepsilon^{1/2}+\varepsilon),\end{aligned}$$

что доказывает соотношение (4.1).

Собственные значения $\Lambda_n(\mu)$ суть решения уравнения (4.2), а соответствующие собственные функции — суть $\sin\sqrt{\Lambda_n}(x_2-\pi)$. Следовательно, эти собственные значения голоморфны относительно $\mu$ по теореме об обратной функции. Формулу (4.3) можно проверить с помощью разложения $\Lambda_n(\mu)$ относительно $\mu$.

## 5. Асимптотическое разложение нижнего края существенного спектра

Напомним, что спектр оператора $\mathscr{H}_\varepsilon$ состоит лишь из существенной части и что он имеет зонную структуру. В предыдущем параграфе мы видели, что асимптотики зонных функций в случаях Дирихле и Неймана отличаются членом после главного члена. Действительно, этот член является константой в случае Дирихле и голоморфной функций по $\mu$ в случае Неймана. На самом деле, это ряд по $\mu$, и по этой причине упомянутая выше двухчленная асимптотика в формуле (4.1) может рассматриваться как асимптотика с большим числом членов. Более интересная ситуация возникает при асимптотике нижнего края спектра. Здесь различия более существенны. Мы представим асимптотику нижнего края существенного спектра в следующих утверждениях и затем обсудим полученные результаты.

**Теорема 5.1** (случай Дирихле)**.** *Предположим, что справедливо* (2.1). *Для достаточно малого* $\varepsilon$

$$\inf_{\tau\in[-1,1)}\lambda_1(\tau,\varepsilon)=\lambda_1(0,\varepsilon). \tag{5.1}$$

*Справедлива следующая асимптотика*:

$$\lambda_1(0,\varepsilon)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j K_j(\eta), \tag{5.2}$$

*где*

$$K_1(\eta)=\frac{2}{\pi}\ln\sin\eta,\quad K_2(\eta)=\frac{3}{\pi^2}\ln^2\sin\eta,$$

*и остальные* $K_j$ *можно найти рекуррентно в явном виде. Кроме того,*

$$K_j(\eta)=c_j\ln^j\eta+\mathscr{O}(\ln^{j-3}\eta),\quad \eta\to+0, \tag{5.3}$$

*где* $c_j$ *— константы.*

Пусть

$$\theta(\beta)=-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(2j-1)!!\zeta(2j+1)}{8^j\,j!}\beta^{j-1},\quad \zeta \text{ — риманова } z\text{-функция.}$$

**Теорема 5.2** (случай Неймана)**.** *Предположим, что справедливо* (2.2). *Для достаточно малого* $\varepsilon$ *справедливо тождество* (5.1) *и*

$$\lambda_1(0,\varepsilon)=\Lambda(\varepsilon,\mu)+\mathscr{O}(\mu\varepsilon^{-1/2}\mathrm{e}^{-2\varepsilon^{-1}}+\varepsilon^{1/2}\eta^{1/2}) \tag{5.4}$$

$$\sqrt{\Lambda}\cos\sqrt{\Lambda}\pi+\mu\sin\sqrt{\Lambda}\pi-\varepsilon^3\mu\Lambda^{3/2}\theta(\varepsilon^2\Lambda)\cos\sqrt{\Lambda}\pi=0 \tag{5.5}$$

$$\Lambda(\varepsilon,\mu)=\Lambda_1(\mu)+o(1),\quad \varepsilon\to 0. \tag{5.6}$$

*Функция $\Lambda(\varepsilon,\mu)$ голоморфна по совокупности переменных $\varepsilon$ и $\mu$,*

$$\Lambda(\varepsilon,\mu)=\Lambda_1(\mu)+\mu^2\sum_{j=1}^{+\infty}\varepsilon^{2j+1}K_{2j+1}(\mu)+\mu^3\sum_{j=3}^{+\infty}\varepsilon^{2j}K_{2j}(\mu), \tag{5.7}$$

*где функции $K_j(\mu)$ голоморфны по $\mu$.*

Как мы видим, асимптотики нижнего края вещественного спектра существенно отличаются в случаях Дирихле и Неймана. В случае Дирихле асимптотика задана формулой (5.2), и это есть асимптотический ряд с коэффициентами, неограниченно возрастающими при $\eta\to+0$. Тем не менее, благодаря (5.3), каждый член в (5.2) ведет себя как $\mathscr{O}(\varepsilon^j\ln^j\eta)$, и, благодаря условию $\varepsilon\ln\eta\to 0$, это позволят сохранять ряд (5.2) асимптотическим.

В случае Неймана асимптотика (5.4) включает лишь один член $\Lambda(\varepsilon,\mu)$. Эта функция определяется как решение уравнения (5.5), и это есть ряд (см. (5.7)). Чтобы получить асимптотику для нижнего края существенного спектра в случае Неймана, мы используем ту же технику, как и для ограниченных областей в [**4, 7, 8**]. Эта техника приводит к ряду (5.7), который будет желаемой асимптотикой, однако это не означает сходимость ряда.

Для доказательства более сильного результата — асимптотики (5.4) — мы модифицируем технику из [**4, 7, 8**]. Главная идея состоит в построении пограничного слоя — не ряда, как в указанных статьях, а как единственной функции, зависящей от масштабированных переменных и малого параметра. Стандартным образом мы получаем краевую задачу для этой функции. Эта задача зависит от малого параметра и основная проблема в том, что это спектральная задача для некоторого оператора со спектральным параметром, лежащим внутри существенного спектра. Тем не менее, нам удается доказать разрешимость этой задачи и изучить некоторые требуемые свойства решения. Таким образом, получаем уравнение (5.5), его голоморфное решение (5.6) и экспоненциально малую погрешность в (5.4). Мы рассматриваем асимптотику (5.4) как сильный результат, поскольку обычно в сингулярно возмущенных задачах сложно доказать сходимость асимптотики, не говоря уж о голоморфной зависимости от малого параметра. Даже если удается доказать сходимость, обычно это независимая проблема — получить экспоненциально малую погрешность, как в (5.4). Полное доказательство этого результата довольно технично и может быть найдено в [**1**].

Заметим также, что все коэффициенты ряда (5.7) можно определить рекурсивно подстановкой этого ряда и выражения $\theta(\beta)$ в (5.5), разлагая (5.5) по степеням $\varepsilon$ и решая полученное уравнение относительно $K_i$.

## Литература


1. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone, “On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition,” *Ann. Henri Poincaré* **11**, No. 8, 1591–1627 (2010).
2. D. Borisov, R. Bunoiu, G. Cardone, “On a waveguide with an infinite number of small windows,” *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* **349**, No. 1-2, 53–56 (2011).
3. D. Borisov, G. Cardone, “Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions,” *J. Phys. A, Math. Theor.* **42**, No. 36, Article ID 365205 (2009).
4. D. Borisov, “On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition,” *Asymptotic Anal.* **35**, No. 1, 1–26 (2003).
5. Г. А. Чечкин, “Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий”, *Мат. сб.* **184**, No. 6, 99–150 (1993).
6. A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong, “Effective permeability of the boundary of a domain,” *Commun. Partial Differ. Equations* **20**, No. 1-2, 59–102 (1995).
7. Р. Р. Гадыльшин, “О краевой задачи для лапласиана с быстро осциллирующими граничными условиями”, *Докл. РАН* **362**, No. 4, 456–459 (1998).
8. Р. Р. Гадыльшин, “Асимптотика собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями”, *Дифф. уравн.* **35**, No. 4, 540–551 (1999).

9. D. Borisov, "The spectrum of two quantum layers coupled by a window," *J. Phys. A, Math. Theor.* **40**, No. 19 5045–5066 (2007).
10. W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, "Weakly coupled bound states in quantum waveguides," *Proc. Amer. Math. Soc.* **12**, 1487–1495 (1997).
11. P. Exner, P. Šeba, M. Tater, D. Vaněk, "Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window", *J. Math. Phys.* **37**, 4867–4887 (1996).
12. Т. А. Суслина, "Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка", *Алгебра анал.* **22**, No. 1, 108–222 (2010).
13. В. В. Жиков, "О некоторых оценках из теории усреднения", *Докл. РАН* **406**, No. 5, 597–601 (2006).
14. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, "Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром", *Успехи мат. наук* **12**, 2 вып. 5. 3–122 (1957).
15. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М. (1979).
16. М. Рид, Б. Саймон. *Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов*, Мир. М., (1982).
17. O. A. Olejnik, A. S. Shamaev, and G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam (1992).


Статья поступила в редакцию 22 мая 2011 г.