ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сентябрь, 2006 **Выпуск 33. С. 13–78**

Д. И. Борисов

Башкирский государственный педагогический университет, Россия
Институт ядерной физики Чешской академии наук, Чехия
borisovdi@yandex.ru

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, ВОЗМУЩЕННОГО БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Изучается спектр одномерного оператора Шредингера, возмущенного быстро осциллирующим потенциалом. Период осцилляций является малым параметром. В явном виде найден существенный спектр рассматриваемого оператора. Изучены вопросы существования дискретного спектра. Построены полные асимптотические разложения собственных значений и соответствующих собственных функций. Библиогр.: 35 назв.

§ 0. Введение

Изучению асимптотических свойств решений краевых задач с быстро осциллирующими возмущениями посвящено большое число книг и статей (см., например, монографии [**1**–**7**] и содержащийся там обзор литературы). Много внимания уделяется исследованию спектральных свойств такого рода задач в ограниченных областях (см., например, [**3**, гл. 4, § 10; **5**, гл. III; **6**, гл. XI]. Спектральные свойства дифференциальных операторов в неограниченных областях с быстро осциллирующими возмущениями также представляют большой интерес, так как такие операторы возникают во многих приложениях. В качестве примеров отметим математические модели фотонных кристаллов – материалов с высококонтрастной структурой (см. [**8**]), а также полуклассическую модель динамики электронов в металлах (см. [**9**]). Строгое математическое исследование этих моделей проводилось во многих работах. Не ставя целью перечислить все эти статьи, мы отметим только работы [**10**, **11**] по фотонным кристаллам и [**12**, **13**] по полуклассической модели динамики электронов. Отметим также работы [**14**–**17**], где методами спектральной теории неограниченных операторов разработана абстрактная операторная схема для усреднения периодических дифференциальных операторов физики в неограниченных областях с быстро осциллирующими периодическими возмущениями и был доказан ряд теорем сходимости. Вместе с тем, спектральные свойства дифференциальных операторов в неограниченных областях изучены недостаточно подробно и даже простые в постановке задачи до сих пор не исследованы.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты no. 06-01-00138, 05-01-97912-р_агидель) и стипендией "Marie Curie International Fellowship" в рамках 6-й Европейской рамочной программы (MIF1-CT-2005-006254).

Настоящая работа посвящена изучению одному из таких примеров. А именно, рассматривается задача о спектре оператора

$$H_\varepsilon := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Здесь V — вещественная бесконечно дифференцируемая финитная функция, a — вещественная 1-периодическая непрерывная функция, ε — малый положительный параметр. Предполагается, что функции α и V не равны тождественно нулю.

Основная цель работы — изучение структуры и асимптотического поведения спектра оператора H_ε при $\varepsilon \to 0$. В статье явно построен существенный спектр данного оператора. Исследованы вопросы существования, количества и сходимости собственных значений оператора H_ε. Кроме того, построены полные асимптотические разложения для данных собственных значений и соответствующих собственных функций.

Отметим, что схожая задача о спектре оператора

$$-\frac{d^2}{d\xi^2} + p(\xi) + q(\varepsilon\xi)$$

в $L_2(\mathbb{R})$, недавно рассмотрена в [**13**]. Здесь ε — малый положительный параметр, p — периодическая функция и q — быстро убывающая функция. Замена переменной $x = \varepsilon\xi$ сводит эту задачу к задаче о спектре оператора

$$-\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2} + p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + q(x),$$

где потенциал $p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ оказывается быстро осциллирующей функцией. При весьма жестких ограничениях (в частности, требование аналитичности потенциала q), были получены первые члены асимптотических разложений для собственных значений, лежащих в некотором заданном подынтервале заданной лакуны существенного спектра.

Кратко опишем структуру статьи. В § 1 формулируются основные результаты. В § 2 дано описание существенного спектра оператора H_ε. В § 3 исследуются вопросы существования, количества и сходимости собственных значений, лежащих в полубесконечной лакуне существенного спектра. В § 4–5 строятся асимптотические разложения для этих собственных значений и соответствующих собственных функций. В § 6 изучаются вопросы существования и количества собственных значений оператора H_ε, лежащих во внутренних лакунах существенного спектра. В § 7 строятся асимптотические разложения для данных собственных значений и соответствующих собственных функций.

Результаты настоящей работы частично анонсированы в [**18**].

§ 1. Основные результаты

Без ограничения общности считаем, что функция a удовлетворяет равенству

$$\int_0^1 a(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{1.1}$$

Данного равенства всегда можно добиться, производя сдвиг спектра оператора H_ε и добавляя соответствующую константу к функции a. Символами $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ обозначаем соответственно спектр, дискретный спектр и существенный спектр. Ясно, что операторы H_ε и H_0 самосопряжены.

Первый результат данной статьи описывает существенный спектр оператора H_ε.

Теорема 1.1. *Существенный спектр оператора H_ε дается равенством*

$$\sigma_{\rm ess}(H_\varepsilon)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\big[\mu_n^+(\varepsilon^2),\mu_{n+1}^-(\varepsilon^2)\big].$$

Функции $\mu_n^{\pm}(\cdot)$ мероморфны и имеют вид

$$\mu_0^+(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{0,i}^+t^i, \tag{1.2}$$

$$\mu_n^{\pm}(t)=\frac{\pi^2n^2}{t}+\sum_{i=0}^{\infty}\mu_{n,i}^{\pm}t^i. \tag{1.3}$$

Коэффициенты данных рядов определяются согласно (2.10), (2.19), (2.22), (2.24) *и, в частности,*

$$\mu_{0,1}^+=-\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^\xi a(\eta)\,{\rm d}\eta+\int\limits_0^1 a(\eta)\eta\,{\rm d}\eta\right)^2{\rm d}\xi, \tag{1.4}$$

$$\mu_{n,0}^{\pm}=\pm\sqrt{a_n^2+b_n^2}, \tag{1.5}$$

где

$$a_n=\int\limits_0^1 a(\xi)\cos 2\pi n\xi\,{\rm d}\xi,$$

$$b_n=\int\limits_0^1 a(\xi)\sin 2\pi n\xi\,{\rm d}\xi.$$

Лакуна (μ_n^-,μ_n^+) в существенном спектре оператора H_ε отсутствует, если имеет место случай (2) *леммы* 2.7.

Согласно теореме 1.1 существенный спектр оператора H_ε имеет зонную структуру и состоит из бесконечного набора отрезков $[\mu_n^+(\varepsilon^2),\mu_{n+1}^-(\varepsilon^2)]$. Каждый из этих отрезков имеет длину порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$. Лакуны $(\mu_n^-(\varepsilon^2),\mu_n^+(\varepsilon^2))$, $n\geqslant 1$, в существенном спектре "убегают" в бесконечность при $\varepsilon\to 0$, оставаясь при этом ограниченными по длине. Условием конечности n-й лакуны является неравенство $a_n^2+b_n^2\neq 0$ (см. (1.3), (1.5)). В противном случае длина лакуны стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Граница μ_0^+ существенного спектра расположена левее нуля и имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, так как $\mu_{0,1}^+<0$.

Основные результаты работы посвящены описанию поведения дискретного спектра оператора H_ε. В случае существования, собственные значения лежат в лакунах непрерывного спектра. Отметим, что в силу единственности решения задачи Коши каждое из этих собственных значений простое.

Следующая часть результатов описывает дискретный спектр оператора H_ε в полубесконечной лакуне $(-\infty,\mu_0^+(\varepsilon^2))$. Для формулировки этих результатов нам понадобятся дополнительные обозначения.

Рассмотрим оператор

$$H_0:=-\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$$

в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Как известно, существенный спектр оператора H_0 совпадает с положительной полуосью $[0,+\infty)$, а дискретный спектр оператора H_0 пуст либо состоит из конечного числа простых отрицательных собственных значений (см. [**19**, § 30, Теорема 8, § 31, Теорема 25]). Обозначим эти собственные значения через $\lambda_0^{(n)}$, $n=-K,\dots,-1$, где $K\geqslant 0$

(случай $K=0$ соответствует отсутствию дискретного спектра у оператора H_0). Считаем, что собственные значения $\lambda_0^{(n)}$ расположены в порядке возрастания:

$$\lambda_0^{(-K)} < \lambda_0^{(-K+1)} < \ldots < \lambda_0^{(-1)} < 0.$$

Соответствующие ортонормированные в $L_2(\mathbb{R})$ собственные функции обозначим через $\psi_0^{(n)}$. Пусть x_0 такое, что $\operatorname{supp} V \subset (-x_0, x_0)$.

Теорема 1.2. *Предположим, что не существует нетривиального решения задачи*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)\psi_0^{(0)}=0, \quad x\in\mathbb{R}, \qquad \psi_0^{(0)}(x)=\psi_0^{(0)}(\pm x_0), \quad \pm x \geqslant x_0, \tag{1.6}$$

в классе $W_{2,loc}^2(\mathbb{R})$. Тогда для достаточно малых ε оператор H_ε имеет ровно K собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n=-K,\ldots,-1$, в полубесконечной лакуне $(-\infty, \mu_0^+(\varepsilon^2))$, каждое из которых является простым и имеет асимптотическое разложение

$$\lambda_\varepsilon^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i^{(n)}, \tag{1.7}$$

$$\lambda_2^{(n)} = \mu_{0,1}^+, \quad \lambda_3^{(n)} = 0, \quad \lambda_4^{(n)} = \mu_{0,2}^+ - 4\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\psi_0^{(n)}}{dx}\right|^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 |\Psi(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi, \tag{1.8}$$

$$\Psi(\xi) := -\int\limits_0^\xi (\xi-\eta)a(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\eta^2-\eta-2\xi\eta)a(\eta)\,\mathrm{d}\eta \not\equiv 0. \tag{1.9}$$

Теорема 1.3. *Предположим, что существует нетривиальное решение задачи* (1.6) *в классе $W_{2,\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R})$. Тогда для достаточно малых ε оператор H_ε имеет ровно $(K+1)$ собственных значений $\lambda_0^{(n)}$, $n=-K,\ldots,0$, в полубесконечной лакуне $(-\infty,\mu_0^+)$. Собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n=-K,\ldots,-1$, простые и имеют асимптотики* (1.7), (1.8). *Собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ является простым и имеет асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon^{(0)} = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i^{(0)}, \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_{2j}^{(0)} = \mu_{0,j}^+, \quad \lambda_{2j+1}^{(0)} = 0, \quad j=1,2,3,\\ &\lambda_8^{(0)} = \mu_{0,4}^+ - 16\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\psi_0^{(0)}}{dx}\right|^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 |\Psi(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)^2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\beta_\pm = \psi_0^{(0)}(\pm x_0), \quad \beta_+^2+\beta_-^2=1, \tag{1.12}$$

а функция Ψ определена равенством (1.9).

Замечание 1.1. Если нетривиальное решение задачи (1.6) существует, то оно единственно с точностью до числового множителя и бесконечно дифференцируемо. Нормирующее условие (1.12) определяет такое решение однозначно. Отметим также, что $\beta_\pm \neq 0$, так как каждое из равенств $\beta_\pm = 0$ противоречит нетривиальности функции $\psi_0^{(0)}$.

Ввиду теорем 1.2, 1.3 собственные значения оператора H_ε, лежащие в полубесконечной лакуне, сходятся к собственным значениям оператора H_0 либо к краю его существенного спектра. Кроме того, лакуны в существенном спектре оператора H_ε в пределе "исчезают" в бесконечности, а нижняя граница $\mu_0^+(\varepsilon^2)$ этого спектра сходится к нижней границе существенного спектра оператора H_0. Подобный эффект можно интерпретировать как сходимость в определенном смысле существенного спектра оператора H_ε к существенному спектру оператора H_0. Поэтому оператор H_ε можно рассматривать как возмущение оператора H_0 потенциалом $a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. Отметим, что такое возмущение сдвигает собственные значения оператора H_0 влево, причем величина сдвига в главных членах совпадает со сдвигом границы существенного спектра. Величина сдвига собственных значений H_0 больше сдвига существенного спектра, так как сумма $(\lambda_0^{(n)} - \lambda_\varepsilon^{(n)} + \mu_0^+(\varepsilon^2))$ положительна и имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$.

Кроме собственных значений, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к собственным значениям оператора H_0, оператор H_ε в полубесконечной лакуне может иметь дополнительное собственное значение, возникающее из границы существенного спектра. Существование данного собственного значения эквивалентно существованию нетривиального решения задачи (1.6). Ясно, что существование этого решения не зависит от выбора точки x_0 и полностью определяется потенциалом V. В случае возникновения собственного значения из границы существенного спектра, расстояние от данного собственного значения до границы существенного спектра оператора H_ε имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^8)$.

Таким образом, по отношению к собственным значениям в полубесконечной лакуне и границе существенного спектра оператора H_0 потенциал $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ведет себя как отрицательно определенное возмущение. Отметим, что схожий эффект на примере собственного значения, возникающего из границы существенного спектра, ранее был обнаружен в [**20**, **21**] для оператора

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon V(x),$$

где V — финитная либо достаточно быстро убывающая функция с нулевым средним.

Дальнейшие результаты в данной статье относятся к дискретному спектру оператора H_ε во внутренних лакунах. Мы рассматриваем только те лакуны $\big(\mu_n^-(\varepsilon^2), \mu_n^+(\varepsilon^2)\big)$, $n \geqslant 1$, для которых выполнено условие $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, что эквивалентно конечности длины лакуны.

Теорема 1.4. *Пусть для некоторого $n \geqslant 1$ по крайней мере одно из чисел a_n и b_n не равно нулю. Тогда оператор H_ε имеет не более двух собственных значений в лакуне $\big(\mu_n^-(\varepsilon^2), \mu_n^+(\varepsilon^2)\big)$. Каждое из этих собственных значений простое и удовлетворяет равенству*

$$\lambda_\varepsilon - \mu(\varepsilon^2) = o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.13}$$

где $\mu = \mu_n^-$ или $\mu = \mu_n^+$. Если в лакуне $\big(\mu_n^-(\varepsilon^2), \mu_n^+(\varepsilon^2)\big)$ содержится два собственных значения оператора H_ε, то одно из них удовлетворяет равенству (1.13) *с $\mu = \mu_n^-$, а другое – с $\mu = \mu_n^+$.*

Пусть выполнено условие данной теоремы. Если в лакуне $\big(\mu_n^-(\varepsilon^2), \mu_n^+(\varepsilon^2)\big)$ существует собственное значение оператора H_ε, удовлетворяющее (1.13) с $\mu = \mu_n^-$, то обозначим это собственное значение через $\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}$. Аналогично, если в лакуне $\big(\mu_n^-(\varepsilon^2), \mu_n^+(\varepsilon^2)\big)$ существует собственное значение оператора H_ε, удовлетворяющее (1.13) с $\mu = \mu_n^+$, то обозначим это собственное значение через $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$.

Теорема 1.5. *Пусть для некоторого $n \geqslant 1$ по крайней мере одно из чисел a_n и b_n не равно нулю. Тогда*

(1) *Оператор H_ε имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}$ тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

(2) *Оператор H_ε имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$ тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \zeta_n^+\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)\left(\mathrm{I}+\varepsilon V T_{14}^+(\varepsilon)\right)^{-1} V(x)\zeta_n^+\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)\,\mathrm{d}x<0. \tag{1.14}$$

Здесь функция ζ_n^+ *определяется формулами* (2.13), (2.18), (2.23) *и леммой* 2.8, *а оператор* T_{14}^+ *определен равенством* (6.20).

Теорема 1.6. *Пусть для некоторого* $n\geqslant 1$ *по крайней мере одно из чисел* a_n *и* b_n *не равно нулю и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

Тогда асимптотика собственного значения $\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}$ *имеет вид*

$$\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}=\frac{\pi^2n^2}{\varepsilon^2}+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\lambda_{i,-}^{(n)}, \tag{1.15}$$

$$\lambda_{0,-}^{(n)}=\mu_{n,0}^-,\quad \lambda_{1,-}^{(n)}=0,\quad \lambda_{2,-}^{(n)}=\mu_{n,1}^-+\frac{2\pi^2n^2\left(\tau_2^-\right)^2}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}, \tag{1.16}$$

где

$$\tau_2^-:=\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\pi^2n^2}\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x.$$

Если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

то

$$\lambda_{2,-}^{(n)}=\mu_{n,1}^-,\quad \lambda_{3,-}^{(n)}=\lambda_{5,-}^{(n)}=0,\quad \lambda_{4,-}^{(n)}=\mu_{n,2}^-,\quad \lambda_{6,-}^{(n)}=\mu_{n,3}^-+\frac{2\pi^2n^2\left(\tau_4^-\right)^2}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}},$$

где

$$\tau_4^-:=\frac{2\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\pi^4n^4}\left(2\int\limits_{\mathbb{R}} V^2(x)\,\mathrm{d}x+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-t)V(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right).$$

Теорема 1.7. *Пусть для некоторого* $n\geqslant 1$ *по крайней мере одно из чисел* a_n *и* b_n *не равно нулю. Пусть существует натуральное число* $\mathfrak{n}_+$ *такое, что числа* τ_i^+, *определенные леммой 7.2, удовлетворяют соотношениям*

$$\tau_i^+=0,\quad i\leqslant\mathfrak{n}_+-1,\qquad \tau_{\mathfrak{n}_+}\neq 0.$$

В этом случае собственное значение $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$ *существует тогда и только тогда, когда* $\tau_{\mathfrak{n}_+}>0$. *Асимптотика собственного значения* $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$ *имеет вид*

$$\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}=\frac{\pi^2n^2}{\varepsilon^2}+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\lambda_{i,+}^{(n)} \tag{1.17}$$

$$\lambda_{2j,+}^{(n)}=\mu_{n,j}^+,\quad \lambda_{2j+1,+}^{(n)}=0,\quad j\leqslant\mathfrak{n}_+-2,\quad \lambda_{2\mathfrak{n}_+-2,+}^{(n)}=\mu_{n,\mathfrak{n}_+}^+-\frac{2\pi^2n^2\left(\tau_{\mathfrak{n}_+}^+\right)^2}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}. \tag{1.18}$$

В частности,

$$\tau_2^+ = \frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\pi^2 n^2}\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x, \quad \tau_3^+ = 0 \tag{1.19}$$

$$\tau_2^+ = \frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\pi^2 n^2}\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x, \quad \tau_3^+ = 0,$$

и

$$\tau_4^+ := -\frac{2\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\pi^4 n^4}\left(2\int\limits_{\mathbb{R}} V^2(x)\,\mathrm{d}x - \sqrt{a_n^2+b_n^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-t)V(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right), \tag{1.20}$$

если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Замечание 1.2. В § 4, 5, 7 приведен алгоритм определения всех коэффициентов рядов (1.7), (1.10), (1.15), (1.17). Мы выписываем эти формулы в теоремах 1.2, 1.3, 1.6, 1.7, так как они включают большое число дополнительных обозначений. По той же причине мы не приводим здесь асимптотических разложений собственных функций оператора H_ε, а формулируем соответствующие утверждения в конце § 4, 5, 7 (теоремы 4.1, 5.1, 7.1).

Согласно утверждению (1) теоремы 1.5 собственное значение $\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

а в силу теоремы 1.7 и формулы (1.19) для τ_2^+ собственное значение $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$ существует, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x < 0,$$

и отсутствует, если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Таким образом, в конечной лакуне $\big(\mu_n^-(\varepsilon^2), \mu_n^+(\varepsilon^2)\big)$ всегда существует по меньшей мере одно собственное значение оператора H_ε. Более того, в случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$$

в конечной лакуне существует ровно одно собственное значение, которое расположено возле одного из краев лакуны в зависимости от знака

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x$$

и отличается от этого края на величину порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

то в конечной лакуне существует собственное значение $\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}$, которое отстоит от левого края на величину порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^6)$. Существование собственного значения $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$ определяется числами τ_i^+, построенными в § 6 (см. (7.25), (1.20)). В частности, из теоремы 1.7 и (1.20) следует, что собственное значение $\lambda_{\varepsilon,-}^{(n)}$ существует, если

$$2\int\limits_{\mathbb{R}} V^2(x)\,\mathrm{d}x < \sqrt{a_n^2+b_n^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-t)V(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x \tag{1.21}$$

и отсутствует, если выполнено противоположное неравенство. Ясно, что для заданного потенциала V всегда можно добиться любого знака в данном неравенстве за счет подходящего выбора a.

Подчеркнем, что при изучении поведения дискретного спектра во внутренних лакунах оператора H_ε возмущением фактически является потенциал V, не зависящий от ε, а в качестве невозмущенного уместно рассматривать оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2}+a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

С этой точки зрения достаточно естественным является результат о том, что решающую роль при определении существования собственных значений во внутренних лакунах играет среднее от потенциала V по оси.

Следует также отметить, что в случае существования собственное значение $\lambda_{\varepsilon,+}^{(n)}$ отличается от правого края лакуны на величину $\mathcal{O}(\varepsilon^{2m})$, где $m \geqslant 3$, причем случай $m>3$ также можно реализовать, для чего достаточно выбрать потенциалы a и V так, чтобы получить равенство левой и правой частей в (1.21).

Таким образом, в отличие от случая полубесконечной лакуны, в конечной лакуне потенциал $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ведет себя как знакопеременное возмущение. Следует также отметить, что утверждения теорем 1.4–1.7 согласуются с результатами работ [**22**–**25**] (см. также [**26**]). В этих работах рассматривался оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2}+p(x)+q(x),$$

где $p\in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ — периодическая функция, а q удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(1+|x|)|q(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

Было показано, что в лакунах существенного спектра содержится конечно число собственных значений, в далеких по номеру лакунах — не более двух собственных значений, причем в случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}} q(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$$

в далеких лакунах содержится ровно одно собственное значение. Подчеркнем, что утверждение теорем 1.5, 1.6, 1.7 о существовании и количестве собственных значений в заданной лакуне не следует из результатов цитированных работ, так как мы не предполагаем, что номер рассматриваемой лакуны обязательно большой.

§ 2. Существенный спектр

В данном параграфе доказывается теорема 1.1. Оператор

$$\widetilde{H}_\varepsilon := -\frac{d^2}{dx^2}+a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$ является самосопряженным. Нетрудно проверить, что оператор умножения на функцию $V(x)$ является $\widetilde{H}_\varepsilon$-компактным. Отсюда в силу теоремы 5.35 из [**27**, гл. IV, § 5.6] следует равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\varepsilon)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\widetilde{H}_\varepsilon).$$

Таким образом, для доказательства теоремы 1.1 достаточно изучить структуру существенного спектра оператора $\widetilde{H}_\varepsilon$. В силу периодичности потенциала $a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ и согласно [**28**, гл. 2, § 2.8] существенный спектр оператора $\widetilde{H}_\varepsilon$ имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\widetilde{H}_\varepsilon) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [\mu_n^+, \mu_{n+1}^-], \tag{2.1}$$

где величины μ_0^+ и $\mu_n^\pm$ являются собственными значениями краевых задач

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\zeta = \mu\zeta, \quad x \in [0,\varepsilon],$$
$$\zeta(0) - \zeta(\varepsilon) = 0, \quad \frac{d\zeta}{dx}(0) - \frac{d\zeta}{dx}(\varepsilon) = 0, \quad \text{если } n \text{ четно},$$
$$\zeta(0) + \zeta(\varepsilon) = 0, \quad \frac{d\zeta}{dx}(0) + \frac{d\zeta}{dx}(\varepsilon) = 0, \quad \text{если } n \text{ нечетно}.$$

Решения этих задач ищутся в пространстве $C^2[0,\varepsilon]$. Выполнив замену переменной $\xi = x/\varepsilon$, получаем, что величины $M_n^\pm := \varepsilon^2\mu_n^\pm$ являются собственными значениями краевых задач для уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \varepsilon^2 a(\xi)\right)\zeta = M\zeta, \quad \xi \in [0,1], \tag{2.2}$$

с краевыми условиями

$$\zeta(0) - \zeta(1) = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\xi}(0) - \frac{d\zeta}{d\xi}(1) = 0, \tag{2.3}$$

если n четно, и

$$\zeta(0) + \zeta(1) = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\xi}(0) + \frac{d\zeta}{d\xi}(1) = 0, \tag{2.4}$$

если n нечетно. Здесь $\zeta = \zeta(\xi)$.

Лемма 2.1. *Собственные значения задач* (2.2), (2.3) *и* (2.2), (2.4) *голоморфны по* ε^2. *Соответствующие ортонормированные в* $L_2(0,1)$ *собственные функции можно выбрать голоморфными по* ε^2 *в норме* $C^2[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}^+$ (соответственно, $\mathcal{W}^-$) подмножество функций из $W_2^2(0,1)$, удовлетворяющих краевым условиям (2.3) (соответственно, (2.4)). Используя оценку

$$|u(0)| + |u(1)| + |u'(0)| + |u'(1)| \leqslant C\|u\|_{W_2^2(0,1)}$$

несложно проверить, что множества $\mathcal{W}^\pm$ являются гильбертовыми пространствами. Оператор

$$-\frac{d^2}{d\xi^2} + \delta a(\xi)$$

в $L_2(0,1)$ с областью определения $\mathcal{W}^+$ (соответственно, $\mathcal{W}^-$) обозначим через $A^+(\delta)$ (соответственно, $A^-(\delta)$). Будем считать, что комплекснозначный параметр δ принадлежит малой симметричной относительно вещественной оси окрестности интервала $(-\delta_0, \delta_0)$, где δ_0 — достаточно малое фиксированное число. Непосредственно по определению проверяется, что операторы $A^\pm(\delta)$ являются самосопряженными голоморфными семействами типа (A) (см. определение в [**27**, гл. VII, § 2.1, 3.1]). Легко убедиться что резольвенты операторов $A^\pm(0)$ компактны, откуда в силу теоремы 2.4 из [**27**, гл. VII, § 2.1] следует, что операторы $A^\pm(\delta)$ также имеют компактную резольвенту. Описанные свойства операторов $A^\pm(\delta)$ позволяют применить к ним теорему 3.9 из

[**27**, гл. VII, § 3.5], из которой уже вытекает голоморфность по $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ собственных значений операторов $A^{\pm}(\delta)$, а также существование соответствующих ортонормированных в $L_2(0,1)$ собственных функций, голоморфных по $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ в норме того же пространства. Рассматривая эти собственные функции как решения краевых задач для уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + 1\right)\zeta = \zeta - \delta a \zeta + M\zeta \tag{2.5}$$

с краевыми условиями (2.3) или (2.4), выводим, что собственные функции операторов $A^{\pm}(\delta)$ голоморфны в норме $W_2^2(0,1)$. В силу включения $C^1[0,1] \subset W_2^2(0,1)$ отсюда следует голоморфность собственных функций в норме $C^1[0,1]$. Вновь рассматривая собственные функции как решения краевых задач для уравнения (2.5), заключаем, что они принадлежат $C^2[0,1]$ и голоморфны по δ в норме этого пространства. $\square$

Согласно доказанной лемме собственные значения $M_n^{\pm}(\varepsilon^2)$ имеют вид

$$M_n^{\pm} = M_n^{\pm}(\varepsilon^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \mu_{n,i-1}^{\pm}, \tag{2.6}$$

где $\mu_{n,i-1}^{\pm}$ — некоторые числа. Числа $\mu_{n,-1}^{\pm}$ являются собственными значениями задач (2.2), (2.3) и (2.2), (2.4) с $\varepsilon = 0$. Нетрудно проверить, что

$$\mu_{0,-1}^{+} = 0, \quad \mu_{n,-1}^{\pm} = \pi^2 n^2, \quad n \geqslant 1.$$

Определим остальные коэффициенты рядов (2.6). Вначале рассмотрим случай $n = 0$. Собственное значение $\mu_{0,-1}^{+}$ задачи (2.2), (2.3) простое, а соответствующая собственная функция имеет вид $\zeta_{0,0}^{+}(\xi) \equiv 1$. В силу леммы 2.1 собственное значение $M_0^{+}(\varepsilon^2)$ также является простым. Всюду далее $(\cdot,\cdot)_X$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве X.

Лемма 2.2. *Собственную функцию ζ_0^{+}, соответствующую $M_0^{+}(\varepsilon^2)$, можно выбрать голоморфной по ε^2 в норме $C^2[0,1]$:*

$$\zeta_0^{+}(\xi, \varepsilon^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \zeta_{0,i}^{+}(\xi), \tag{2.7}$$

где для функций $\zeta_{0,i}^{+}$ выполнены равенства

$$\int_0^1 \zeta_{0,i}^{+}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0, \quad i \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Доказательство. В силу леммы 2.1 собственную функцию, соответствующую M_0^{+}, можно выбрать нормированной в $L_2(\mathbb{R})$ и голоморфной по ε^2 в норме $C^2[0,1]$. Обозначим такую собственную функцию через $\widetilde{\zeta}_0^{+} = \widetilde{\zeta}_0^{+}(\xi, \varepsilon^2)$. Без ограничения общности будем считать, что выполнено равенство $\widetilde{\zeta}_0^{+}(\xi, 0) \equiv \zeta_{0,0}^{+}(\xi)$. Учитывая свойства $\widetilde{\zeta}_0^{+}$, нетрудно проверить, что функция $\zeta_0(\xi, \varepsilon^2) := \big(\widetilde{\zeta}_0^{+}, \zeta_{0,0}^{+}\big)_{L_2(0,1)}^{-1} \widetilde{\zeta}_0(\xi, \varepsilon^2)$ удовлетворяет утверждению леммы. $\square$

Всюду далее считаем, что функция ζ_0^{+} выбрана согласно лемме 2.2. Подставим ряды (2.6) и (2.7) в краевую задачу (2.2), (2.3) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. С учетом голоморфности функций M_0^{+} и ζ_0^{+} по ε^2 такая подстановка не является формальной операцией, а потому получаем, что задача (2.2), (2.3) для M_0^{+} и ζ_0^{+} эквивалентна следующей рекуррентной системе краевых задач:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d^2}{d\xi^2}\zeta^+_{0,i}=-a\zeta^+_{0,i-1}+\sum_{j=1}^{i}\mu^+_{0,j-1}\zeta^+_{0,i-j},\quad \xi\in[0,1],\\
&\zeta^+_{0,i}(0)-\zeta^+_{0,i}(1)=0,\quad i\geqslant 1,\\
&\frac{d\zeta^+_{0,i}}{d\xi}(0)-\frac{d\zeta^+_{0,i}}{d\xi}(1)=0,\quad i\geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Для определения коэффициентов рядов (2.6), (2.7) для $n=0$ достаточно найти решения этих задач, удовлетворяющие условиям (2.8).

Непосредственными вычислениями проверяется следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть $f\in C[0,1]$. Краевая задача*

$$
-\frac{d^2u}{d\xi^2}=f,\quad \xi\in[0,1],
$$
$$
u(0)-u(1)=0,\quad \frac{du}{d\xi}(0)-\frac{du}{d\xi}(1)=0
$$

имеет единственное решение $u\in C^2[0,1]$, удовлетворяющее равенству

$$
\int\limits_0^1 u(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0,
$$

тогда и только тогда, когда

$$
\int\limits_0^1 f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0.
$$

Решение u дается формулой

$$
u(\xi)=L_0[f](\xi):=-\int\limits_0^{\xi}(\xi-\eta)f(\eta)\,\mathrm{d}\eta+\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\eta^2-\eta-2\xi\eta)f(\eta)\,\mathrm{d}\eta.
$$

Последовательно решая краевые задачи (2.9) с помощью леммы 2.3 и учитывая (1.1), (2.8), получаем

$$
\begin{aligned}
&\mu^+_{0,0}=0,\quad \mu^+_{0,i}=\int\limits_0^1 a\zeta^+_{0,i}\,\mathrm{d}\xi,\quad i\geqslant 1,\\
&\zeta^+_{0,1}=-L_0[a],\quad \zeta^+_{0,i}=L_0\left[-a\zeta^+_{0,i-1}+\sum_{j=2}^{i}\mu^+_{0,j-1}\zeta^+_{0,i-j}\right],\quad i\geqslant 2.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

где коэффициенты $\mu^+_{0,i}$ определяются из условий разрешимости краевых задач (2.9). Вычислим $\mu^+_{0,1}$:

$$
\mu^+_{0,1}=\int\limits_0^1 a\zeta^+_{0,1}\,\mathrm{d}\xi=\int\limits_0^1\zeta^+_{0,1}\frac{d^2}{d\xi^2}\zeta^+_{0,1}\,\mathrm{d}\xi=-\int\limits_0^1\left(\frac{d}{d\xi}\zeta^+_{0,1}\right)^2\mathrm{d}\xi,
$$

откуда с учетом определения оператора L_0 следует формула (1.4). Утверждение теоремы 1.1 о μ^+_0 доказано.

Вычислим коэффициенты $\mu^{\pm}_{n,i}$ для $n>0$. Собственные функции $\zeta^{\pm}_{n,0}$, соответствующие $\mu^{\pm}_{n,-1}$, обозначим через $\zeta^{\pm}_{n,0}$ и выберем ортогональными в $L_2(0,1)$ в виде

$$\begin{aligned} \zeta_{n,0}^{+}(\xi) &= \sqrt{2}\cos(\pi n\xi+\alpha),\\ \zeta_{n,0}^{-}(\xi) &= \sqrt{2}\sin(\pi n\xi+\alpha), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ — некоторое число, зависящее от n. Так как функции $M_n^{\pm}(\varepsilon^2)$ голоморфны по ε^2, без ограничения общности можно считать, что

$$M_n^{-}(\varepsilon^2) \leqslant M_n^{+}(\varepsilon^2). \tag{2.12}$$

Лемма 2.4. *Собственные функции $\zeta_n^{\pm}$, соответствующие $M_n^{\pm}$, и число α в (2.11) можно выбрать так, что функции $\zeta_n^{\pm}$ будут ортогональны в $L_2(0,1)$ и голоморфны по ε^2 в норме $C^2[0,1]$:*

$$\zeta_n^{\pm}(\xi,\varepsilon^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i}\zeta_{n,i}^{\pm}(\xi), \tag{2.13}$$

где для функций $\zeta_{n,i}^{\pm}$ выполнены равенства

$$\left(\zeta_{n,i}^{\pm}, \zeta_{n,0}^{\pm}\right)_{L_2(0,1)} = 0, \quad i \geqslant 1. \tag{2.14}$$

Доказательство. Пользуясь леммой 2.1, собственные функции $\widetilde{\zeta}_n^{\pm} = \widetilde{\zeta}_n^{\pm}(\xi,\varepsilon^2)$, соответствующие $M_n^{\pm}$, выберем ортонормированными в $L_2(0,1)$ и голоморфными по ε^2 в $C^2[0,1]$. Так как $\widetilde{\zeta}_n^{\pm}(\xi,0)$ — собственные функции задачи (2.2), (2.3) или (2.2), (2.4), соответствующие $\mu_{n,-1}^{\pm}$ и ортонормированные в $L_2(0,1)$, можно выбрать число α в (2.11) таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\widetilde{\zeta}_n^{\pm}(\xi,0) \equiv \zeta_{n,0}^{\pm}(\xi).$$

Теперь уже нетрудно проверить, что функции

$$\zeta_n^{\pm}(\xi,\varepsilon^2) := \left(\zeta_n^{\pm}, \zeta_{n,0}^{\pm}\right)_{L_2(0,1)}^{-1} \widetilde{\zeta}_n^{\pm}(\xi,\varepsilon^2)$$

удовлетворяют утверждению леммы. □

Всюду далее считаем, что функции $\zeta_n^{\pm}$ выбраны согласно лемме 2.4. Как и в случае $n=0$, для определения коэффициентов рядов (2.6), (2.13) необходимо поставить эти ряды в одну из краевых задач (2.2), (2.3) и (2.2), (2.4) (в зависимости от четности n) и собрать коэффициенты при одинаковых степенях ε, что приводит к следующим краевым задачам:

$$\begin{gathered} -\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2 n^2\right)\zeta_{n,i}^{\pm} = -a(\xi)\zeta_{n,i-1}^{\pm} + \sum_{j=1}^{i} \mu_{n,j-1}^{\pm}\zeta_{n,i-j}^{\pm}, \quad \xi \in [0,1], \\ \zeta_{n,i}^{\pm}(0) + (-1)^{n+1}\zeta_{n,i}^{\pm}(1) = 0, \quad \frac{d\zeta_{n,i}^{\pm}}{d\xi}(0) + (-1)^{n+1}\frac{d\zeta_{n,i}^{\pm}}{d\xi}(1) = 0, \quad i \geqslant 1. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Далее нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2.5. *Пусть $f \in C[0,1]$. Краевая задача*

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2 n^2\right)u = f, \quad \xi \in [0,1], \\ &u(0) + (-1)^{n+1}u(1) = 0, \\ &\frac{du}{d\xi}(0) + (-1)^{n+1}\frac{du}{d\xi}(1) = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

имеет единственное решение $u \in C^2[0,1]$, ортогональное функциям $\zeta_{n,0}^{\pm}$ в $L_2(0,1)$ тогда и только тогда, когда

$$\left(f, \zeta_{n,0}^{\pm}\right)_{L_2(0,1)} = 0.$$

Решение u дается формулой

$$u(\xi)=L_n[f](\xi):=-\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\xi \sin\pi n(\xi-\eta)f(\eta)\,\mathrm{d}\eta-\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^1 \eta\sin\pi n(\xi-\eta)f(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

Утверждение леммы проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 2.6. *Пусть p, s — некоторые натуральные числа, A_i, $B_{i,j}$ — произвольные числовые последовательности. Тогда*

$$\sum_{i=s}^{p-s}\sum_{j=0}^{i-s}A_jB_{p-i,i-j}=\sum_{i=s}^{p-s}\sum_{j=0}^{i-s}A_jB_{i-j,p-i}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из цепочки равенств

$$\sum_{i=s}^{p-s}\sum_{j=0}^{i-s}A_jB_{p-i,i-j}=\sum_{j=0}^{p-2s}\sum_{i=j+s}^{p-s}A_jB_{p-i,i-j}=\sum_{j=0}^{p-2s}\sum_{\widetilde{i}=j+s}^{p-s}A_jB_{\widetilde{i}-j,p-\widetilde{i}}=\sum_{\widetilde{i}=s}^{p-s}\sum_{j=0}^{\widetilde{i}-s}A_jB_{\widetilde{i}-j,p-\widetilde{i}},$$

где была сделана замена индекса суммирования $\widetilde{i}=p-i+j$. □

Обозначим

$$\Phi^+_{n,0}(\xi):=\sqrt{2}\cos(\pi n\,\xi),\quad \Phi^-_{n,0}(\xi):=\sqrt{2}\sin(\pi n\,\xi),$$

$$M^{\pm,+}_{n,0}:=M^{\pm,-}_{n,0}:=0,\quad \Phi^\pm_{n,i}:=L_n\left[-a\Phi^\pm_{n,i-1}+\sum_{j=1}^{i}M^{\pm,\pm}_{n,j}\Phi^\pm_{n,i-j}\right],$$

$$M^{\pm,+}_{n,i}:=\left(a\Phi^\pm_{n,i-1},\Phi^+_{n,0}\right)_{L_2(0,1)},\quad M^{\pm,-}_{n,i}:=\left(a\Phi^\pm_{n,i-1},\Phi^-_{n,0}\right)_{L_2(0,1)}.$$

Лемма 2.7. *Имеет место одна из двух ситуаций:*

(1) *Существует число $N\geqslant 1$ такое, что равенства*

$$M^{+,-}_{n,i}=M^{-,+}_{n,i}=M^{+,+}_{n,i}-M^{-,-}_{n,i}=0 \tag{2.17}$$

выполнены для $i\leqslant N-1$ и по крайней мере одно из трех чисел

$$M^{+,-}_{n,N},\quad M^{-,+}_{n,N},\quad \left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)$$

не равно нулю. В этом случае функции $\Phi^\pm_{n,i}$, $1\leqslant i\leqslant N$, удовлетворяют краевым условиям из (2.16), ортогональны $\Phi^+_{n,0}$ и $\Phi^-_{n,0}$ в $L_2(0,1)$ и верно равенство $M^{+,-}_{n,N}=M^{-,+}_{n,N}$.

(2) *Равенства (2.17) выполнены для всех $i\geqslant 1$. В этом случае $\mu^-_n(\varepsilon^2)\equiv\mu^+_n(\varepsilon^2)$ и лакуна $\left(\mu^-_n(\varepsilon^2),\mu^+_n(\varepsilon^2)\right)$ в существенном спектре оператора H_ε отсутствует.*

Доказательство. Ясно, что условие одного из случаев (1) и (2) всегда имеет место и эти случаи исключают друг друга. Пусть выполнено условие случая (1). Предположим, что равенства (2.17) верны для $i\leqslant m$, а функции $\Phi^\pm_{n,i}$, $1\leqslant i\leqslant m$, ортогональны $\Phi^+_{n,0}$ и $\Phi^-_{n,0}$ в $L_2(0,1)$. В таком случае функции

$$f^\pm:=-a\Phi^\pm_{n,m}+\sum_{j=1}^{m+1}M^{\pm,\pm}_{n,j}\Phi^\pm_{m-j+1}$$

удовлетворяют условию леммы 2.5, а $\Phi^\pm_{n,m+1}$ — соответствующие им решения краевой задачи (2.16). Отсюда вытекает, что функции $\Phi^\pm_{n,m+1}$ удовлетворяют краевым условиям из (2.16) и ортогональны $\Phi^+_{n,0}$ и $\Phi^-_{n,0}$ в $L_2(0,1)$. Следовательно, все функции $\Phi^\pm_{n,i}$, $1\leqslant i\leqslant N-1$, удовлетворяют краевым условиям из (2.16) и ортогональны $\Phi^+_{n,0}$ и $\Phi^-_{n,0}$ в $L_2(0,1)$.

Докажем равенство $M^{+,-}_{n,N} = M^{-,+}_{n,N}$. Оно очевидно, если $N = 1$. Пусть $N \geqslant 2$. Учитывая определение и доказанные свойства функций $\Phi^{\pm}_{n,i}$ и интегрируя по частям, получаем ($1 \leqslant i \leqslant N-1$, $0 \leqslant j \leqslant N-2$)

$$\int\limits_0^1 a\Phi^+_{n,i}\Phi^-_{n,j}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^1 \Phi^+_{n,i}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2n^2\right)\Phi^-_{n,j+1}\,\mathrm{d}\xi + \sum_{q=1}^{j+1} M^{-,-}_{n,q}\int\limits_0^1 \Phi^+_{n,i}\Phi^-_{n,j-q+1}\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int\limits_0^1 a\Phi^+_{n,i-1}\Phi^-_{n,j+1}\,\mathrm{d}\xi - \sum_{q=1}^{i-1} M^{+,+}_{n,q}\int\limits_0^1 \Phi^+_{n,i-q}\Phi^-_{n,j+1}\,\mathrm{d}\xi + \sum_{q=1}^{j} M^{-,-}_{n,q}\int\limits_0^1 \Phi^+_{n,i}\Phi^-_{n,j-q+1}\,\mathrm{d}\xi,$$

откуда в силу (2.17) вытекает

$$\int\limits_0^1 a\Phi^+_{n,N-1}\Phi^-_{n,0}\,\mathrm{d}\xi = \sum_{j=1}^{N-2}\sum_{q=1}^{j} M^{+,+}_{n,q}\int\limits_0^1 \Phi^+_{n,N-j-1}\Phi^-_{n,j-q+1}\,\mathrm{d}\xi -$$
$$- \sum_{i=2}^{N-1}\sum_{q=1}^{i-1} M^{+,+}_{n,q}\int\limits_0^1 \Phi^+_{n,i-q}\Phi^-_{n,N-i}\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^1 a\Phi^+_{n,0}\Phi^-_{n,N-1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Заменяя индекс суммирования $j \mapsto j+1$ в первом слагаемом в правой части полученного равенства и применяя ко второму слагаемому лемму 2.6 с $p = N$, $s = 1$, $A_j = M^{+,+}_{n,j}$, $j \geqslant 0$,

$$B_{i,j} = \int\limits_0^1 \Phi^+_{n,i}\Phi^-_{n,j}\,\mathrm{d}\xi,$$

приходим к равенству

$$M^{+,-}_{n,N} = M^{-,+}_{n,N}.$$

Пусть имеет место случай (2) и равенства (2.17) выполнены для всех $i \geqslant 1$. Тогда из определения $\Phi^{\pm}_{n,i}$ следует, что функции

$$\zeta^+_{n,i} = \Phi^+_{n,i}\cos\alpha - \Phi^-_{n,i}\sin\alpha,$$
$$\zeta^-_{n,i} = \Phi^-_{n,i}\sin\alpha + \Phi^+_{n,i}\cos\alpha$$

являются решениями краевых задач (2.15) с $\mu^{\pm}_{n,i} = M^{\pm,\pm}_{n,i+1}$. Из (2.17) выводим равенства $\mu^-_{n,i} = \mu^+_{n,i}$, откуда уже следует, что $\mu^-_n(\varepsilon^2) \equiv \mu^+_n(\varepsilon^2)$. □

Всюду до конца параграфа считаем, что имеет место случай (1) леммы 2.7. Используя леммы 2.5, 2.7 и определение функций $\Phi^{\pm}_{n,i}$ и чисел $M^{\pm}_{n,i}$, прямыми вычислениями нетрудно проверить, что общие решения краевых задач (2.15) для $i \leqslant N-1$, удовлетворяющие условиям (2.14), и числа $\mu^{\pm}_{n,i}$ с $i \leqslant N-2$ имеют вид

$$\zeta^{\pm}_{n,i} = \widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i} + \sum_{j=1}^{i} c^{\pm}_{n,j}\zeta^{\mp}_{n,i-j}, \quad i \leqslant N-1, \tag{2.18}$$

где $\widetilde{\zeta}^+_{n,i} = \Phi^+_{n,i}\cos\alpha - \Phi^-_{n,i}\sin\alpha$, $\widetilde{\zeta}^-_{n,i} = \Phi^+_{n,i}\sin\alpha + \Phi^-_{n,i}\cos\alpha$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, $c^{\pm}_{n,i}$ — некоторые числа,

$$\mu^+_{n,i} = M^{+,+}_{n,i+1} = M^{-,-}_{n,i+1} = \mu^-_{n,i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant N-2. \tag{2.19}$$

Отсюда в силу леммы 2.5, леммы 2.7(1) и определения чисел $M^{\pm,\pm}_{n,i}$ выводим, что условия разрешимости краевой задачи (2.15) для $\zeta^{\pm}_{n,N}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mu^{\pm}_{n,N-1} = \left(a\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,N-1}, \zeta^{\pm}_{n,0}\right)_{L_2(0,1)}, \\ &\left(a\widetilde{\zeta}^+_{n,N-1}, \zeta^-_{n,0}\right)_{L_2(0,1)} = \left(a\widetilde{\zeta}^-_{n,N-1}, \zeta^+_{n,0}\right)_{L_2(0,1)} = 0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

откуда

$$\mu^{\pm}_{n,N-1}=\frac{M^{+,+}_{n,N}+M^{-,-}_{n,N}\pm\left(\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)\cos 2\alpha-2M^{+,-}_{n,N}\sin 2\alpha\right)}{2},$$
$$\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)\sin 2\alpha+2M^{+,-}_{n,N}\cos 2\alpha=0. \tag{2.21}$$

По условию леммы 2.7(1) одно из чисел $\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)$, $M^{+,-}_{n,N}$ отлично от нуля, а потому равенство (2.21), рассматриваемое как уравнение на α, имеет ровно два корня в интервале $(-\pi/2,\pi/2]$, отличающиеся на π. Используя (2.21), проверяем, что для каждого из корней этого уравнения справедливо равенство

$$\left(\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)\cos 2\alpha-2M^{+,-}_{n,N}\sin 2\alpha\right)^2=\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)^2+4\left(M^{+,-}_{n,N}\right)^2.$$

Учитывая данное равенство, нетрудно убедиться, что для одного из корней уравнения (2.21) будет выполнено

$$\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)\cos 2\alpha-2M^{+,-}_{n,N}\sin 2\alpha=\sqrt{\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)^2+4\left(M^{+,-}_{n,N}\right)^2}>0.$$

Значение $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2]$ выберем так, чтобы было верно последнее неравенство. Подобный выбор объясняется тем, что в этом случаем выполнено неравенство $\mu^{-}_{n,N-1}<\mu^{+}_{n,N-1}$, что с учетом (2.19) соответствует упорядочиванию (2.12):

$$\mu^{\pm}_{n,N-1}=\frac{M^{+,+}_{n,N}+M^{-,-}_{n,N}\pm\sqrt{\left(M^{+,+}_{n,N}-M^{-,-}_{n,N}\right)^2+4\left(M^{+,-}_{n,N}\right)^2}}{2}. \tag{2.22}$$

Учитывая (2.18) и краевые задачи для $\zeta^{\pm}_{n,N}$, выводим, что функции $\zeta^{\pm}_{n,N}$ имеют вид

$$\zeta^{\pm}_{n,N}=\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,N}+\sum_{j=1}^{N}c^{\pm}_{n,j}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,N-j},$$
$$\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,N}=L_n\left[-a\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,N-1}+\sum_{j=1}^{N}\mu^{\pm}_{n,j-1}\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,N-j}\right]. \tag{2.23}$$

Лемма 2.8. *Функции $\zeta^{\pm}_{n,i}$ при $i\geqslant N$ и числа $\mu^{\pm}_{n,i}$ при $i\geqslant N-1$ определяются равенствами*

$$\zeta^{\pm}_{n,i}=\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i}+\sum_{j=i-N+1}^{i}c^{\pm}_{n,j}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,i-j},$$
$$\mu^{\pm}_{n,i}=\left(a\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i},\zeta^{\pm}_{n,0}\right)_{L_2(0,1)}, \tag{2.24}$$

где

$$\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i}=L_n\Bigg[-a\left(\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i-1}+c^{\pm}_{n,i-N}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,N-1}\right)+\sum_{j=N+1}^{i}\mu^{\pm}_{n,j-1}\zeta^{\pm}_{n,i-j}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\mu^{\pm}_{n,j-1}\Bigg(\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i-j}+\sum_{p=\max\{i-j-N+1,1\}}^{i-N}c^{\pm}_{n,p}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,i-j-p}\Bigg)\Bigg],$$

$$c^{\pm}_{n,i-N}=\frac{1}{\mu^{\pm}_{n,N-1}-\mu^{\mp}_{n,N-1}}\left(\left(a\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i-1},\zeta^{\mp}_{n,0}\right)_{L_2(0,1)}-\sum_{j=N+1}^{i-1}\mu^{\pm}_{n,j-1}c^{\pm}_{n,i-j}\right).$$

Функции $\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,i}$ ортогональны $\zeta^{+}_{n,0}$ и $\zeta^{-}_{n,0}$ в $L_2(0,1)$.

Доказательство. Применим индукцию. Утверждение леммы для $\zeta^{\pm}_{n,N}$, $\mu^{\pm}_{n,N-1}$ и $c^{\pm}_{n,0}$ следует из формул (2.20), (2.23), если положить $c^{\pm}_{n,0}=0$. Пусть утверждение леммы верно для $\zeta^{\pm}_{n,i}$ и $c^{\pm}_{n,i-N}$ при $i\leqslant m$ и для $\mu^{\pm}_{n,i}$ при $i\leqslant m-1$. Обозначим правые части уравнений в (2.15) для $i=m+1$ через $f^{\pm}_{m+1}$. В силу индукционного предположения эти функции имеют вид

$$\begin{aligned}f^{\pm}_{m+1}=&-a\left(\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,m}-\sum_{j=m-N+1}^{m}c^{\pm}_{n,j}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,m-j}\right)+\sum_{j=N+1}^{m+1}\mu^{\pm}_{n,j-1}\zeta^{\pm}_{n,m-j+1}\\&+\sum_{j=1}^{N}\mu^{\pm}_{n,j-1}\left(\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,m-j+1}+\sum_{p=\max\{m-j-N+2,1\}}^{m-N}c^{\pm}_{n,p}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,m-j-p+1}\right)\\&+\sum_{j=m-N+1}^{m}c^{\pm}_{n,j}\sum_{p=1}^{m-j+1}\mu^{\pm}_{n,p-1}\widetilde{\zeta}^{\mp}_{n,m-j-p+1}.\end{aligned}$$

Выпишем условия разрешимости краевых задач (2.15), учитывая индукционное предположение, лемму 2.7(1) и равенства (2.18), (2.20), (2.22) и $\mu^{+}_{n,i}=\mu^{-}_{n,i}$, $i\leqslant N-2$:

$$\mu^{\pm}_{n,m}-\big(a\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,m},\zeta^{\pm}_{n,0}\big)_{L_2(0,1)}=0,$$

$$c^{\pm}_{n,m-N+1}\left(\mu^{\pm}_{n,N-1}-\mu^{\mp}_{n,N-1}\right)-\big(a\widetilde{\zeta}^{\pm}_{n,m},\zeta^{\mp}_{n,0}\big)_{L_2(0,1)}+\sum_{j=N+1}^{m}\mu^{\pm}_{n,j-1}c^{\pm}_{n,m-j+1}=0.$$

Полученные равенства доказывают утверждение леммы для $\mu^{\pm}_{n,m}$ и $c^{\pm}_{n,N-m+1}$. Утверждение леммы для $\zeta^{\pm}_{n,m+1}$ следует из вида функций $f^{\pm}_{m+1}$, определения оператора L_n и функций $\zeta^{\pm}_{n,i}$, $i\leqslant N-1$. □

Докажем формулу (1.5). Вычислим $M^{\pm;\pm}_{n,1}$:

$$M^{+;-}_{n,1}=M^{-;+}_{n,1}=2\int\limits_0^1 a(\xi)\sin\pi n\,\xi\cos\pi n\,\xi\,\mathrm{d}\xi=b_n,$$

$$M^{+;+}_{n,1}=2\int\limits_0^1 a(\xi)\cos^2\pi n\,\xi\,\mathrm{d}\xi=a_n,$$

$$M^{-;-}_{n,1}=2\int\limits_0^1 a(\xi)\sin^2\pi n\,\xi\,\mathrm{d}\xi=-a_n.$$

Если хотя бы одно из чисел a_n, b_n не равно нулю, то $N=1$. Формула (1.5) в этом случае следует непосредственно из (2.22). Если $a_n=b_n=0$, то $N\geqslant 2$ и $M^{+;+}_{n,1}=M^{-;-}_{n,1}=0$, откуда в силу (2.19) вновь следует формула (1.5).

Замечание 2.1. Отметим, что формулы (1.5) следуют также из результатов [**29**, гл. XXI, § 11], где исследовался спектр оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}+\varepsilon q(x)$ с периодической функцией $q(x)$ и были построены первые члены асимптотических разложений концов существенного спектра данного оператора. Вместе с тем, в цитированной книге полное разложение построено не было, не было дано и доказательства голоморфной зависимости данных концов от малого параметра.

§ 3. Существование и сходимость дискретного спектра в полубесконечной лакуне

В настоящем параграфе мы исследуем вопросы существования, количества и сходимости собственных значений оператора H_ε, лежащих в полубесконечной лакуне $\big(-\infty, \mu_0^+(\varepsilon^2)\big)$.

Через $\mathfrak{C}$ обозначим множество всех конечных интервалов вещественной оси. Вначале докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный компакт в комплексной плоскости такой, что при всех достаточно малых ε*

$$\mathfrak{L}\cap\sigma_{\mathrm{disc}}(H_0)=\varnothing,\quad \mathfrak{L}\cap\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\varepsilon)=\varnothing. \tag{3.1}$$

Тогда для достаточно малых ε и $\lambda\in\mathfrak{L}$ резольвента $(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}$ определена и является ограниченным линейным оператором из $L_2(\mathbb{R})$ в $W_2^2(\mathbb{R})$:

$$\|(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}f\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\leqslant C\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{3.2}$$

где константа C не зависит от ε, $f\in L_2(\mathbb{R})$, $\lambda\in\mathfrak{L}$. Для любой функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ верна равномерная по $\lambda\in\mathfrak{L}$ сходимость

$$(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}f\to(H_0-\lambda)^{-1}f,\quad \varepsilon\to 0, \tag{3.3}$$

слабая в $W_2^2(\mathbb{R})$ и сильная в $W_2^1(Q)$ для всех $Q\in\mathfrak{C}$.

Доказательство. Вначале докажем, что для достаточно малых ε для любой функции $u\in W_2^2(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\leqslant C\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{3.4}$$

где $f=(H_\varepsilon-\lambda)u$, а константа C не зависит от u, ε и $\lambda\in\mathfrak{L}$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что существуют последовательности $\varepsilon_p\to 0$, $\lambda_p\in\mathfrak{L}$, $u_p\in W_2^2(\mathbb{R})$, такие, что

$$\|u_p\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\geqslant p\|f_p\|_{L_2(\mathbb{R})},\quad f_p:=(H_{\varepsilon_p}-\lambda_p)u_p. \tag{3.5}$$

Без ограничения общности считаем, что $\lambda_p\to\lambda_*\in\mathfrak{L}$ и $\|u_p\|_{L_2(\mathbb{R})}=1$. Учитывая нормировку функций u_p, получаем

$$\big(f_p,u_p\big)_{L_2(\mathbb{R})}\big((H_{\varepsilon_p}-\lambda_p)u_p,u_p\big)_{L_2(\mathbb{R})}=\left\|\frac{du_p}{dx}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}-\lambda_p+\left(\left(V(x)+a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)u_p,u_p\right)_{L_2(\mathbb{R})},$$

откуда в силу определения u_p следует

$$\|u_p\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\leqslant\|f_p\|_{L_2(\mathbb{R})}+C\|u_p\|_{W_2^1(\mathbb{R})}\leqslant C\left(\|f_p\|_{L_2(\mathbb{R})}+1\right),$$

где константа C не зависит от p. Из полученной оценки и (3.5) вытекает равномерное по p неравенство

$$\|u_p\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\leqslant C. \tag{3.6}$$

Подставляя полученное неравенство в (3.5), выводим

$$\|f_p\|_{L_2(\mathbb{R})}\to 0. \tag{3.7}$$

В силу (3.6) из последовательности u_p можно выделить подпоследовательность (которую вновь обозначим через u_p), слабо сходящуюся в $W_2^2(\mathbb{R})$ к некоторой функции $u_*\in W_2^2(\mathbb{R})$. Для любого интервала $Q\in\mathfrak{C}$ оператор вложения $W_2^2(\mathbb{R})$ в $W_2^1(Q)$ компактен. Так как компактный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, причем слабый предел отображается в сильный предел (см., например, теорему 1 из [**30**, гл. VI, § 1], последовательность u_p сходится к u_* сильно в $W_2^1(Q)$ для всех $Q\in\mathfrak{C}$.

Функции u_p, очевидно, удовлетворяют равенству $(\widetilde{H}_{\varepsilon_p}-\lambda_p)u_p=f_p-Vu_p$, откуда и из (2.1), (3.1) в силу формулы (3.16) из [**27**, гл. 5, § 3.5] получаем

$$
\begin{aligned}
1=\|u_p\|_{L_2(\mathbb{R})}&=\|(\widetilde{H}_{\varepsilon_p}-\lambda_p)^{-1}(f_p-Vu_p)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\
&\leqslant \frac{\big(\|f_p\|_{L_2(\mathbb{R})}+\|Vu_p\|_{L_2(\mathbb{R})}\big)}{\operatorname{dist}(\lambda_p,\sigma(\widetilde{H}_\varepsilon))}\leqslant \frac{\big(\|f_p\|_{L_2(\mathbb{R})}+\|Vu_p\|_{L_2(\mathbb{R})}\big)}{\operatorname{dist}(\mathfrak{L},\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\varepsilon))}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Последнее неравенство в силу (3.1), (3.7) приводит к равномерной по p оценке

$$\|Vu_p\|_{L_2(\mathbb{R})}\geqslant C>0,$$

откуда в силу финитности V и сходимости u_p к u_* в норме $W_2^1(\operatorname{supp}V)$ вытекает $u_*\not\equiv 0$.

Для любой пробной функции $\varsigma\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ из соотношения

$$\big((H_{\varepsilon_p}-\lambda_p)u_p,\varsigma\big)_{L_2(\mathbb{R})}=(f_p,\varsigma)_{L_2(\mathbb{R})}$$

следует равенство

$$-\left(\frac{du_p}{dx},\frac{d\varsigma}{dx}\right)_{L_2(\mathbb{R})}-\lambda_p(u_p,\varsigma)_{L_2(\mathbb{R})}+(Vu_p,\varsigma)_{L_2(\mathbb{R})}+\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon_p}\right)u_p,\varsigma\right)_{L_2(\mathbb{R})}=(f_p,\varsigma)_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Из финитности ς, сильной в $W_2^1(\operatorname{supp}\varsigma)$ сходимости $u_p\to u_*$, равенства (1.1) и леммы 4.1 из [**4**, гл. V, § 4] выводим, что последнее слагаемое в левой части полученного равенства стремиться к нулю при $\varepsilon\to 0$. Учитывая данный факт, (3.7) и слабую в $W_2^1(\mathbb{R})$ сходимость $u_p\to u_*$, перейдем в последнем равенстве к пределу при $p\to+\infty$. Тогда

$$-\left(\frac{du_*}{dx},\frac{d\varsigma}{dx}\right)_{L_2(\mathbb{R})}-\lambda_*(u_*,\varsigma)_{L_2(\mathbb{R})}+(Vu_*,\varsigma)_{L_2(\mathbb{R})}=0,$$

откуда следует, что u_* удовлетворяет уравнению $(H_0-\lambda_*)u_*=0$. Ввиду установленного выше неравенства $u_*\not\equiv 0$ данное уравнение означает, что $\lambda_*\in\mathfrak{L}$ — собственное значение оператора H_0, что противоречит (3.1). Оценка (3.4) доказана.

Из результатов [**30**, гл. VII, § 7] и оценки (3.4) вытекает существование и ограниченность резольвенты $(H_\varepsilon-\lambda)^{-1}:L_2(\mathbb{R})\to W_2^2(\mathbb{R})$, а также оценка (3.2).

Используя оценку (3.2) вместо (3.6) и рассуждая так же, как при выводе оценки (3.2), нетрудно показать, что для любых последовательностей $\varepsilon_p\to 0$, $\lambda_p\to\lambda_*$, $\lambda_p\in\mathfrak{L}$, функция $(H_{\varepsilon_p}-\lambda_p)^{-1}f$ сходится к $(H_0-\lambda_*)^{-1}f$ слабо в $W_2^2(\mathbb{R})$ и сильно в $W_2^1(Q)$ для всех $Q\in\mathfrak{C}$. Учитывая данную сходимость и аналитичность функции $(H_0-\lambda)^{-1}f$ по $\lambda\in\mathfrak{L}$ в норме $W_2^2(\mathbb{R})$, от противного доказывается сходимость (3.3). □

Замечание 3.1. Идеи, использованные в доказательстве леммы 3.1, заимствованы из доказательства теоремы 2.1 в [**31**].

Положим $B_\delta(\lambda_0):=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\lambda_0|<\delta\}$.

Лемма 3.2. *Пусть число $\delta_0<0$ таково, что*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H_0)=\{\lambda_0^{(-K)},\ldots,\lambda_0^{(-1)}\}\subset(-\infty,\delta_0].$$

Тогда для достаточно малых ε полуинтервал $(-\infty,\delta_0]$ содержит ровно K собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n=-K,\ldots,-1$ оператора H_ε, каждое из которых является простым, и верны сходимости

$$\lambda_\varepsilon^{(n)}\to\lambda_0^{(n)},\quad n=-K,\ldots,-1.$$

Соответствующие ортонормированные в $L_2(\mathbb{R})$ собственные функции можно выбрать так, что будут справедливы сходимости

$$\psi_\varepsilon^{(n)}\to\psi_0^{(n)},\quad n=-K,\ldots,-1,$$

слабые в $W_2^2(\mathbb{R})$ *и сильные в* $W_2^1(Q)$ *для всех* $Q \in \mathfrak{C}$.

Доказательство. Согласно [**22**] для каждого значения $\varepsilon > 0$ число собственных значений оператора H_ε, лежащих в полубесконечной лакуне $(-\infty, \mu_0^+(\varepsilon^2))$, конечно. Дискретный спектр оператора H_ε полуограничен снизу:

$$(-\infty, 0) \cap \sigma_{\mathrm{disc}}(H_\varepsilon) \subset [c, 0], \quad c = \min_{[0,1]} a(\xi) + \min_{\mathbb{R}} V(x).$$

Обозначим

$$\mathfrak{L} := [c, \delta_0] \setminus \bigcup_{n=-K}^{-1} (\lambda_0^{(n)} - \delta, \lambda_0^{(n)} + \delta),$$

где δ — произвольное малое число. Тогда компакт $\mathfrak{L}$ удовлетворяет условию леммы 3.1 и, следовательно, при малых ε резольвента $(H_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ ограничена равномерно по $\lambda \in \mathfrak{L}$, а потому множество $\mathfrak{L}$ не содержит собственных значений оператора H_ε для достаточно малых ε. Так как δ произвольно, отсюда вытекает сходимость собственных значений оператора H_ε, лежащих в $(-\infty, \delta_0]$, к собственным значениям оператора H_0.

Фиксируем n и выберем δ так, чтобы было выполнено равенство

$$\overline{B_\delta(\lambda_0^{(n)})} \cap \sigma(H_0) = \{\lambda_0^{(n)}\}.$$

Тогда из (3.3) с $f = \psi_0^{(n)}$ следует сходимость

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial B_\delta(\lambda_0^{(n)})} (H_\varepsilon - \lambda)^{-1} \psi_0^{(n)} \to -\psi_0^{(n)}, \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.9}$$

слабая в $W_2^2(\mathbb{R})$ и сильная в $W_2^1(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{C}$.

Согласно [**27**, гл. V, § 3.5] в изолированных собственных значениях оператора H_ε резольвента $(H_\varepsilon - \lambda)^{-1} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ имеет простые полюса. Следовательно, рассматриваемая как оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(Q)$, где $Q \in \mathfrak{C}$, резольвента $(H_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ также имеет простые полюса. Учитывая, что правая часть (3.9) не равна нулю, заключаем, что круг $B_\delta(\lambda_0^{(n)})$ содержит по крайней мере одно собственное значение оператора H_ε для достаточно малых ε, а потому к каждому собственному значению оператора H_0 сходится по крайней мере одно собственное значение оператора H_ε.

Пусть $\lambda_{\varepsilon,j}$, $j = 1, \dots, m_n(\varepsilon)$ — собственные значения оператора H_ε, сходящиеся к $\lambda_0^{(n)}$ при $\varepsilon \to 0$. Допустим, что на некоторой последовательности $\varepsilon_p \to 0$ к собственному значению $\lambda_0^{(n)}$ сходится по крайней мере два собственных значения $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\lambda_{\varepsilon,2}$. Соответствующие ортонормированные в $L_2(\mathbb{R})$ собственные функции обозначим через $\psi_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,2}$. Аналогично доказательству леммы 3.1 нетрудно показать, что, выделяя при необходимости из $\{\varepsilon_p\}$ подпоследовательность, можно считать функции $\psi_{\varepsilon_p,i}$ сходящимися к $\psi_{0,i}$ слабо в $W_2^2(\mathbb{R})$ и сильно в $W_2^1(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{C}$, где $\psi_{0,i}$ — собственные функции, соответствующие $\lambda_0^{(n)}$, причем $\psi_{0,i} \not\equiv 0$. Так как $\lambda_0^{(n)}$ — простое собственное значение, имеем

$$\psi_{0,i} = c_i \psi_0^{(n)}.$$

Очевидно, что функция $\widetilde{\psi}_{\varepsilon_p} := c_2 \psi_{\varepsilon_p,1} - c_1 \psi_{\varepsilon_p,2}$ сходится к нулю сильно в $W_2^1(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{C}$. С другой стороны, функция $\widetilde{\psi}_{\varepsilon_p}$ удовлетворяет уравнению

$$(\widetilde{H}_{\varepsilon_p} - \lambda_0^{(n)}) \widetilde{\psi}_{\varepsilon_p} = c_2(\lambda_{\varepsilon_p,1} - \lambda_0^{(n)}) \psi_{\varepsilon_p,1} - c_1(\lambda_{\varepsilon_p,2} - \lambda_0^{(n)}) \psi_{\varepsilon_p,2} - V \widetilde{\psi}_{\varepsilon_p},$$

откуда аналогично (3.8) выводим

$$0 < c_1^2 + c_2^2 \leqslant \frac{|c_2||\lambda_{\varepsilon_p,1} - \lambda_0^{(n)}| + |c_1||\lambda_{\varepsilon_p,2} - \lambda_0^{(n)}| + \|V \widetilde{\psi}_{\varepsilon_p}\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\mu_0^+(\varepsilon^2) - \lambda_0^{(n)}}.$$

Последнее неравенство противоречит сходимости $\widetilde{\psi}_{\varepsilon_p} \to 0$ в $L_2(\operatorname{supp} V)$. Следовательно, к собственному значению $\lambda_0^{(n)}$ сходится только одно собственное значение задачи H_ε.

Докажем сходимости для собственных функций. Согласно [**27**, гл. V, § 3.5] из сходимости $\lambda_\varepsilon^{(n)} \to \lambda_0^{(n)}$ следует, что для достаточно малых ε верно равенство

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial B_\delta(\lambda_0^{(n)})} (H_\varepsilon - \lambda)^{-1} \psi_0^{(n)} \, \mathrm{d}\lambda = -\big(\psi_0^{(n)}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})} \psi_\varepsilon^{(n)},$$

где $\psi_\varepsilon^{(n)}$ — нормированная в $L_2(\mathbb{R})$ собственная функция, соответствующая $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, а δ — то же, что и в (3.9). Отсюда и из (3.9) вытекает сходимость

$$\big(\psi_0^{(n)}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})} \psi_\varepsilon^{(n)} \to \psi_0^{(n)}, \quad \varepsilon \to 0,$$

слабая в $W_2^2(\mathbb{R})$ и сильная в $W_2^1(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{C}$. Так как из слабой сходимости в $W_2^2(\mathbb{R})$ следует слабая сходимость в $L_2(\mathbb{R})$, умножая последнюю сходимость на $\psi_0^{(n)}$ скалярно в $L_2(\mathbb{R})$, выводим

$$\big(\psi_0^{(n)}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)^2_{L_2(\mathbb{R})} \to 1, \quad \varepsilon \to 0.$$

Из последних двух сходимостей следует, что собственная функция $\psi_\varepsilon^{(n)} \operatorname{sgn} \big(\psi_0^{(n)}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})}$ удовлетворяет утверждению леммы. □

При построении асимптотических разложений собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = -K, \ldots, -1$, нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3. *При λ, близких к $\lambda_0^{(n)}$, для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ верно представление*

$$(H_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = -\frac{\psi_\varepsilon^{(n)}}{\lambda - \lambda_\varepsilon^{(n)}} \left(f, \psi_\varepsilon^{(n)}\right)_{L_2(\mathbb{R})} + \widetilde{u}(x, \lambda, \varepsilon), \tag{3.10}$$

где функция $\widetilde{u}(x, \lambda, \varepsilon)$ удовлетворяет оценке

$$\|\widetilde{u}\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leqslant C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{3.11}$$

с константой C, не зависящей от ε, λ и f.

Доказательство. Представление (3.10) с функцией $\widetilde{u}$, голоморфной по λ в норме $L_2(\mathbb{R})$, следует из [**27**, гл. V, § 3.5]. Пусть δ то же, что и в (3.9). Функция $\widetilde{u}$ имеет вид

$$\widetilde{u} = (H_\varepsilon - \lambda)^{-1} \widetilde{f}, \quad \widetilde{f} = f - (f, \psi_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\mathbb{R})} \psi_\varepsilon^{(n)}.$$

Отсюда и из голоморфности $\widetilde{u}$ по λ в норме $L_2(\mathbb{R})$ следует голоморфность $\widetilde{u}$ в норме $W_2^2(\mathbb{R})$. Компакт $\partial B_\delta(\lambda_0)$ удовлетворяет условию леммы 3.1, а потому из приведенного представления для функции $\widetilde{u}$ следует оценка (3.11), равномерная по $\lambda \in \partial B_\delta(\lambda_0)$. В силу принципа максимума модуля для голоморфных функций, функция $\widetilde{u}$ удовлетворяет оценке (3.11) и для $\lambda \in B_\delta(\lambda_0)$. □

Помимо собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = -K, \ldots, -1$, в полубесконечной лакуне $(-\infty, \mu_0^+(\varepsilon^2))$ оператор H_ε может также иметь собственные значения, не сходящиеся к собственным значениям оператора H_0. Как следует из леммы 3.2, такие собственные значения должны стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству того, что оператор H_ε может иметь не более одного такого собственного значения. Кроме того, будет показано, что необходимым условием существования такого собственного значения является наличие нетривиального решения задачи (1.6).

Вначале докажем вспомогательные леммы.

Лемма 3.4. *Решения* $\varphi_i = \varphi_i(\xi,\varepsilon^2)$ *уравнения* (2.2) *с* $M = \varepsilon^2\mu_0^+(\varepsilon^2)$, *удовлетворяющие начальным условиям*

$$\varphi_1(0,\varepsilon^2) = 1, \quad \varphi_1'(0,\varepsilon^2) = 0,$$
$$\varphi_2(0,\varepsilon^2) = 0, \quad \varphi_2'(0,\varepsilon^2) = 1,$$

для достаточно малых ε *имеют вид*

$$\varphi_1 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{2j} P^j(\varepsilon^2)[1],$$

$$\varphi_2 = \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{2j} P^j(\varepsilon^2)[\xi],$$

где оператор $P(\varepsilon^2)$ *определяется равенством*

$$P(\varepsilon^2)[f](\xi,\varepsilon^2) := \int\limits_0^{\xi} (\xi-\eta)(a(\eta)-\mu_0^+(\varepsilon^2))f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

и является линейным ограниченным оператором из $C[0,1]$ *в* $C^2[0,1]$, *голоморфным по* ε^2. *Функции* φ_i *голоморфны по* ε^2 *в норме* $C^2[0,1]$.

Замечание 3.2. Запись $P^j(\varepsilon^2)[1]$ и $P^j(\varepsilon^2)[\xi]$ в утверждении леммы означает применение j-ой степени оператора $P(\varepsilon^2)$ к функциям $f(\xi)\equiv 1$ и $f(\xi)\equiv\xi$.

Доказательство. Утверждаемые свойства оператора P очевидны. Задачи Коши для функций φ_i легко сводятся к интегральным уравнениям

$$\varphi_1 - \varepsilon^2 P(\varepsilon^2)[\varphi_1] = 1,$$
$$\varphi_2 - \varepsilon^2 P(\varepsilon^2)[\varphi_2] = \xi,$$

откуда вытекают утверждаемые ряды для функций φ_i и голоморфность этих функций по ε^2. $\square$

Лемма 3.5. *Решения* $\Theta_i = \Theta_i(\xi,\varepsilon^2,k^2)$ *уравнения* (2.2) *с* $M = \varepsilon^2(\mu_0^+(\varepsilon^2)-k^2)$, *где* k — *малый комплексный параметр, удовлетворяющие начальным условиям*

$$\Theta_1(0,\varepsilon^2,k^2) = 1, \quad \Theta_1'(0,\varepsilon^2,k^2) = 0,$$
$$\Theta_2(0,\varepsilon^2,k^2) = 0, \quad \Theta_2'(0,\varepsilon^2,k^2) = 1,$$

для достаточно малых ε *имеют вид*

$$\Theta_i = \varphi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{2j} k^{2j} \widetilde{P}^j(\varepsilon^2)[\varphi_i],$$

где оператор $\widetilde{P}(\varepsilon^2)$ *определяется равенством*

$$\widetilde{P}(\varepsilon^2)[f](\xi,\varepsilon^2) := \int\limits_0^{\xi} \big(\varphi_2(\xi,\varepsilon^2)\varphi_1(\eta,\varepsilon^2) - \varphi_2(\eta,\varepsilon^2)\varphi_1(\xi,\varepsilon^2)\big)\, f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

и является линейным ограниченным оператором из $C[0,1]$ *в* $C^2[0,1]$, *голоморфным по* ε^2. *Функции* Θ_i *голоморфны по* ε^2 *и* k^2 *в норме* $C^2[0,1]$.

Доказательство. Ограниченность и голоморфность оператора $\widetilde{P}$ следует из леммы 3.4. Сводя уравнение (2.2) к интегральному уравнению

$$\Theta_i - \varepsilon^2 k^2 \widetilde{P}(\varepsilon^2)[\Theta_i] = \varphi_i,$$

легко вывести утверждение леммы о функциях Θ_i. □

Уравнение (2.2) имеет 1-периодические коэффициенты, поэтому к нему применима теория Флоке. Вычислим мультипликаторы, соответствующие этому уравнению с $M = \varepsilon^2\left(\mu_0^+(\varepsilon^2) - k^2\right)$. Введем функцию

$$D = D(\varepsilon^2, k^2) := \Theta_1(1, \varepsilon^2, k^2) + \Theta_2'(1, \varepsilon^2, k^2).$$

В силу формул (8.13) из [**28**, гл. 2, § 2.8] мультипликаторы $\varkappa_\pm = \varkappa_\pm(\varepsilon, k)$ имеют вид

$$\varkappa_\pm = \varkappa^{\pm 1}, \quad \varkappa = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4}}{2}. \tag{3.12}$$

Так как μ_0^+ — край существенного спектра оператора H_ε, а соответствующее решение ζ_0^+ уравнения (2.2) удовлетворяет периодическим краевым условиям (2.3), согласно [**28**, гл. 2, § 2.8] выполнено тождество

$$\varphi_1(1, \varepsilon^2) + \varphi_2'(1, \varepsilon^2) \equiv 2.$$

Учитывая данное тождество, в силу лемм 3.4, 3.5 получаем

$$\begin{aligned}
&D(\varepsilon^2, k^2) = 2 + \varepsilon^2 k^2 \widetilde{D}(\varepsilon^2) + \varepsilon^4 k^2 \widehat{D}(\varepsilon^2, k^2),\\
&\widetilde{D}(\varepsilon^2) := \left.\left(\widetilde{P}(\varepsilon^2)[\varphi_1](\xi, \varepsilon^2) + \frac{d}{d\xi}\widetilde{P}(\varepsilon^2)[\varphi_2](\xi, \varepsilon^2)\right)\right|_{\xi=1} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

где $\widetilde{D}$, $\widehat{D}$ — голоморфные функции. Подставляя данные равенства в (3.12), находим

$$\varkappa(\varepsilon, k) = 1 + \varepsilon k + \varepsilon^3 k \widetilde{\varkappa}^{(1)}(\varepsilon, k) + \varepsilon^2 k^2 \widetilde{\varkappa}^{(2)}(\varepsilon, k), \tag{3.13}$$

где $\widetilde{\varkappa}^{(i)}(\varepsilon, k)$ — голоморфные по ε и k функции. По теореме Флоке — Ляпунова, уравнение (2.2) с $M = \varepsilon^2(\mu_0^+(\varepsilon^2) - k^2)$ имеет решения вида

$$\Theta^\pm = \Theta^\pm(\xi, \varepsilon, k) = \mathrm{e}^{\mp\xi \ln \varkappa(\varepsilon, k)} \Theta^\pm_{\mathrm{per}}(\xi, \varepsilon, k), \tag{3.14}$$

где $\Theta^\pm_{\mathrm{per}}$ — 1-периодические по ξ функции. Обозначим через $W_t(f(t), g(t))$ вронскиан функций $f(t)$ и $g(t)$. Учитывая равенства

$$\begin{aligned}
&\Theta_i(\xi + m, \varepsilon^2, k^2) = \Theta_i(m, \varepsilon^2, k^2)\Theta_1(\xi, \varepsilon^2, k^2) + \Theta_i'(m, \varepsilon^2, k^2)\Theta_2(\xi, \varepsilon^2, k^2), \quad m \in \mathbb{Z},\\
&W_\xi\left(\Theta_1(\xi, \varepsilon^2, k^2), \Theta_2(\xi, \varepsilon^2, k^2)\right) \equiv 1,\\
&\varkappa(\varepsilon, k) + \varkappa^{-1}(\varepsilon, k) = \Theta_1(1, \varepsilon^2, k^2) + \Theta_2'(1, \varepsilon^2, k^2),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

нетрудно проверить, что функции $\Theta^\pm$ можно выбрать следующим образом:

$$\Theta^\pm(\xi, \varepsilon, k) = \Theta_2(1, \varepsilon^2, k^2)\Theta_1(\xi, \varepsilon^2, k^2) + \left(\varkappa^{\mp 1}(\varepsilon, k) - \Theta_1(1, \varepsilon^2, k^2)\right)\Theta_2(\xi, \varepsilon^2, k^2). \tag{3.16}$$

Функции $\Theta^\pm_{\mathrm{per}}(\xi, \varepsilon, k)$ в силу (3.13), (3.14), (3.16) и лемм 3.4, 3.5 удовлетворяет равенству

$$\Theta^\pm_{\mathrm{per}}(\xi, \varepsilon, k) = 1 + \varepsilon^3 k \Theta^{\pm,1}_{\mathrm{per}}(\xi, \varepsilon, k) + \varepsilon^2 k^2 \Theta^{\pm,2}_{\mathrm{per}}(\xi, \varepsilon, k), \tag{3.17}$$

где $\Theta^{\pm,i}_{\mathrm{per}}(\xi, \varepsilon, k)$ — 1-периодические функции, голоморфные по ε и k в норме $C^2[0,1]$.

Рассмотрим уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \lambda\right)u = f, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.18}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$ — финитная функция и $\operatorname{supp} f \subseteq [-x_0, x_0]$. Параметр λ в этом уравнении выберем следующим образом: $\lambda = \mu_0^+(\varepsilon^2) - k^2$, где k — малый комплексный параметр. Решения уравнения (3.18) с таким λ будем искать в классе $W_{2,\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R})$, налагая на них следующее требование:

$$u(x, \varepsilon, k) = c_\pm(\varepsilon, k)\Theta^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon, k\right), \quad \pm x \geqslant x_0. \tag{3.19}$$

Данные равенства можно заменить краевыми условиями

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\Theta^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon, k\right)}\right) = 0, \quad x = \pm x_0. \tag{3.20}$$

В самом деле, решение задачи (3.18), (3.19) с $\lambda = \mu_0^+(\varepsilon^2) - k^2$, очевидно, удовлетворяет краевой задаче (3.18), (3.20). Решение задачи (3.18), (3.20) с $\lambda = \mu_0^+(\varepsilon^2) - k^2$, продолженное по правилу

$$u(x, \varepsilon, k) := \frac{u(\pm x_0, \varepsilon, k)}{\Theta^\pm\left(\pm\frac{x_0}{\varepsilon}, \varepsilon, k\right)}\Theta^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon, k\right), \quad \pm x \geqslant x_0,$$

является решением задачи (3.18), (3.19). Отметим, что из (3.13), (3.14), (3.17) следует, что

$$\Theta^\pm\left(\pm\frac{x_0}{\varepsilon}, k, \varepsilon\right) \neq 0.$$

В задаче (3.18), (3.20) сделаем замену

$$u(x, \varepsilon, k) = U(x, \varepsilon, k)\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right), \tag{3.21}$$

где функция

$$\varphi(\xi, \varepsilon^2) := \varphi_2(1, \varepsilon^2)\varphi_1(\xi, \varepsilon^2) + (1 - \varphi_1(1, \varepsilon^2))\varphi_2(\xi, \varepsilon^2)$$

1-периодическая по ξ. Данная замена корректна, так как в силу леммы 3.4 функция φ голоморфна по ε^2 в норме $C^2[0,1]$, причем $\varphi(\xi, 0) \equiv 1$. В результате замены получаем следующую краевую задачу для U:

$$\begin{gathered}\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 2\varepsilon^{-1}\frac{\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}\frac{d}{dx} + V(x) + k^2\right)U = F, \quad x \in (-x_0, x_0),\\ \frac{dU}{dx} - U\frac{d}{dx}\ln\frac{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}{\Theta^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon, k\right)} = 0, \quad x = \pm x_0,\end{gathered} \tag{3.22}$$

где $F = F(x, \varepsilon) = f(x)/\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)$.

Изучим разрешимость задачи (3.22). Для этого нам понадобится

Лемма 3.6. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для достаточно малых ε верна равномерная по ε и x оценка*

$$\left|\frac{\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}\right| \leqslant C\varepsilon^2.$$

(2) *Функции*

$$\rho_\pm = \rho_\pm(\varepsilon, k) := -\frac{d}{dx}\ln\frac{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}{\Theta^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon, k\right)}\Bigg|_{x=\pm x_0}$$

представимы в виде

$$\rho_\pm(\varepsilon, k) = \mp k + \varepsilon\widetilde{\rho}_\pm(\varepsilon, k),$$

где $\widetilde{\rho}_\pm(\varepsilon, k)$ — голоморфные по k функции, ограниченные равномерно по ε и k вместе со своими производными $\dfrac{d\widetilde{\rho}_\pm}{dk}$.

Доказательство. Утверждение (1) следует непосредственно из определения функции φ и леммы 3.4. Из (3.14) выводим

$$\frac{d}{dx}\ln\Theta^{\pm}(\xi,\varepsilon,k)=\mp\frac{\ln\varkappa(\varepsilon,k)}{\varepsilon}+\frac{d}{dx}\ln\Theta^{\pm}_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon,k\right),$$

откуда и из (3.13), (3.17) и утверждения (1) вытекает утверждение (2). □

Решение задачи (3.22) понимается в обобщенном смысле, а именно, как решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dU}{dx},\frac{d\varsigma}{dx}\right)_{L_2(-x_0,x_0)}-2\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)}{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)}\frac{dU}{dx},\varsigma\right)_{L_2(-x_0,x_0)}+(VU,\varsigma)_{L_2(-x_0,x_0)}\\&+k^2(U,\varsigma)_{L_2(-x_0,x_0)}+\rho_+(x_0)U(x_0,\varepsilon,k)\overline{\varsigma(x_0)}-\rho_-(-x_0)U(-x_0,\varepsilon,k)\overline{\varsigma(-x_0)}\\&=(f,\varsigma)_{L_2(-x_0,x_0)}\end{aligned}\tag{3.23}$$

для всех $\varsigma\in W_2^1(-x_0,x_0)$. Черта в данном уравнении означает комплексное сопряжение. В силу леммы $1'$ из [**32**, гл. IV, § 1] существует линейный ограниченный оператор $T_1:L_2(-x_0,x_0)\to W_2^1(-x_0,x_0)$ такой, что для всех $\varsigma\in W_2^1(-x_0,x_0)$

$$(v,\varsigma)_{L_2(-x_0,x_0)}=(T_1v,\varsigma)_{W_2^1(-x_0,x_0)}.\tag{3.24}$$

Сужение оператора T_1 на $W_2^1(-x_0,x_0)$ компактно и самосопряжено.

Лемма 3.7. *Существуют линейные ограниченные операторы $T_2(\varepsilon)$, $T_3^{\pm}:W_2^1(-x_0,x_0)\to W_2^1(-x_0,x_0)$ такие, что оператор $T_2(\varepsilon)$ ограничен равномерно по ε, операторы $T_3^{\pm}$ компактны и имеют место равенства*

$$\varepsilon^{-2}\left(\frac{\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)}{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)}\frac{dU}{dx},\varsigma\right)_{L_2(-x_0,x_0)}=(T_2(\varepsilon)U,\varsigma)_{W_2^1(-x_0,x_0)},$$

$$U(\pm x_0)\overline{\varsigma(\pm x_0)}=(T_3^{\pm}U,\varsigma)_{W_2^1(-x_0,x_0)}.$$

Доказательство. Положим

$$T_2(\varepsilon)U:=\varepsilon^{-2}T_1\frac{\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)}{\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)}\frac{dU}{dx},$$

$$T_3^{\pm}U:=\frac{U(\pm x_0)\,\mathrm{ch}(x\pm x_0)}{\mathrm{sh}\,2x_0}.$$

Утверждение леммы об операторе $T_2(\varepsilon)$ следует из леммы 3.6(1), (3.24) и ограниченности оператора T_1. Требуемые свойства операторов $T_3^{\pm}$ проверяются прямыми вычислениями. □

В силу (3.24) и доказанной леммы уравнение (3.23) эквивалентно операторному уравнению в $W_2^1(-x_0,x_0)$:

$$(\mathrm{I}-2\varepsilon T_2(\varepsilon)+T_1V+(k^2-1)T_1+\rho_+(\varepsilon,k)T_3^+-\rho_-(\varepsilon,k)T_3^-)U=T_1F,\tag{3.25}$$

где I — единичный оператор, а V — оператор умножения на функцию $V(x)$. Исследуем вначале разрешимость этого уравнения при $\varepsilon=0$ (полагаем $T_2(0):=0$). Обозначим

$$T_4(k):=T_1V+(k^2-1)T_1-k(T_3^-+T_3^+).$$

Лемма 3.8. *Если не существует нетривиального решения задачи* (1.6), *то для достаточно малых k оператор* $(\mathrm{I}+T_4(k))$ *имеет обратный, ограниченный равномерно по* k.

Если существует нетривиальное решение задачи (1.6), *то для малых k имеет место равенство*

$$(\mathrm{I}+T_4(k))^{-1}g = -\frac{\psi_0^{(0)}}{k}\big(g,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)} + T_5(k)g,$$

где $g \in W_2^1(-x_0,x_0)$, $T_5(k) : W_2^1(-x_0,x_0) \to W_2^1(-x_0,x_0)$ — *линейный ограниченный оператор, голоморфный по k, а функция $\psi_0^{(0)}$ удовлетворяет нормировке* (1.12).

Доказательство. Пусть задача (1.6) не имеет нетривиального решения. Оператор $T_4(0)$ компактен, следовательно, в силу альтернатив Фредгольма обратимость оператора $(\mathrm{I}+T_4(0))$ эквивалентна отсутствию нетривиальных решений уравнения

$$(\mathrm{I}+T_4(0))U = 0. \tag{3.26}$$

Легко проверить, что каждое решение такого уравнение является обобщенным решением краевой задачи

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)U = 0, \quad x \in (-x_0,x_0),$$
$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad x = \pm x_0.$$

Данная задача эквивалентна задаче (1.6), которая не имеет нетривиальных решений. Следовательно, оператор $(\mathrm{I}+T_4(0))$ имеет ограниченный обратный, откуда уже следует, что для достаточно малых k и оператор $(\mathrm{I}+T_4(k))$ имеет обратный, ограниченный равномерно по k.

Допустим, что задача (1.6) имеет нетривиальное решение. Операторное уравнение $(\mathrm{I}+T_4(k))U = 0$ описывает обобщенные решения следующей краевой задачи:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V-k^2\right)U = 0, \quad x \in (-x_0,x_0),$$
$$\left(\frac{d}{dx}\pm k\right)U = 0, \quad x = \pm x_0.$$

Нетривиальные решения U этой задачи для $k>0$, продолженные по правилу

$$U(x,k) := U(\pm x_0,k)\mathrm{e}^{\mp k(x\mp x_0)}, \quad \pm x \geqslant x_0,$$

являются собственными функциями оператора H_0, соответствующими собственным значениям $\lambda = -k^2$. Так как отрицательный спектр оператора H_0 дискретен, существует число $k_* > 0$ такое, что $\lambda = -k_*^2$ не является собственным значением оператора H_0, т.е. оператор $(\mathrm{I}+T_4(k_*))^{-1}$ обратим. Учитывая данный факт, а также компактность оператора $T_4(k)$ и теорему 7.1 из [**4**, гл. XV, § 7], заключаем, что оператор $(\mathrm{I}+T_4(k))^{-1}$ мероморфен по k. Функция $\psi_0^{(0)}$ является решением уравнения (3.26), откуда следует, что оператор $(\mathrm{I}+T_4(k))^{-1}$ имеет полюс в нуле:

$$U = (\mathrm{I}+T_4(k))^{-1}g = \frac{U_0}{k^m} + k^{-m+1}T_5(k)g,$$

где $m \geqslant 1$ — порядок полюса, $T_5(k) : W_2^1(-x_0,x_0) \to W_2^1(-x_0,x_0)$ — ограниченный линейный оператор, голоморфный по k. Из данного равенства и определения оператора $T_4(k)$ следует, что

$$g = \frac{(\mathrm{I}+T_4(0))U_0}{k^m} + \frac{(\mathrm{I}+T_4(0))T_5(0)g - (T_3^+ + T_3^-)U_0}{k^{m-1}} + \mathcal{O}(k^{-m+2}), \tag{3.27}$$

т.е. U_0 — решение уравнения (3.26): $U_0 = C(g)\psi_0^{(0)}$, где $C(g)$ — некоторый линейный функционал, не равный тождественно нулю.

Умножим равенство (3.27) скалярно на $\psi_0^{(0)}$ в $W_2^1(-x_0,x_0)$ и учтем определение операторов $T_3^\pm$ и нормировку (1.12):

$$\big(g,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}=\frac{\big((\mathrm{I}+T_4(0))T_5(0)g,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}-C(g)}{k^{m-1}}+\mathcal{O}(k^{-m+2}).$$

Используя определение оператора T_1, нетрудно проверить, что оператор $T_4(0)$ самосопряжен, откуда следует, что

$$\big((\mathrm{I}+T_4(0))T_5(0)g,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}=\big(T_5(0)g,(\mathrm{I}+T_4(0))\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}=0.$$

Так как $C(g)$ не равно тождественно нулю, из последних двух равенств следует, что $m=1$ и $C(g)=-\big(g,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}$. □

Лемма 3.9. *Пусть не существует нетривиального решения задачи* (1.6). *Тогда оператор H_ε не имеет собственных значений, стремящихся к нулю при $\varepsilon\to 0$.*

Доказательство. Из лемм 3.7, 3.8 и леммы 3.6(2) вытекает, что оператор в правой части уравнения (3.25) ограниченно обратим, т.е. уравнение (3.25) с $F=0$ не имеет нетривиальных решений для всех достаточно малых ε и k. Следовательно, задача (3.22), а потому, и задача (3.18), (3.19) не имеет нетривиальных решений при $F=0$ для достаточно малых ε и k. Отсюда следует отсутствие малых собственных значений у оператора H_ε. □

Исследуем случай наличия нетривиального решения задачи (1.6), которое всюду будем предполагать удовлетворяющим равенству (1.12). Мы используем подход, предложенный в [**33**] (см. также [**34**, **35**]).

Применим оператор $(\mathrm{I}+T_4(k))^{-1}$ к уравнению (3.25). В силу лемм 3.6(2) и 3.8 получим

$$\begin{aligned}&U-\frac{\varepsilon}{k}\psi_0^{(0)}\big(T_6(\varepsilon,k)U,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}+\varepsilon T_5(k)T_6(\varepsilon,k)U\\&=-\frac{1}{k}\psi_0^{(0)}\big(T_1F,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}+T_5(k)T_1F,\end{aligned}\tag{3.28}$$

где

$$T_6(\varepsilon,k):=-2T_2(\varepsilon)+\widetilde{\rho}_+(\varepsilon,k)T_3^+-\widetilde{\rho}_-(\varepsilon,k)T_3^-.$$

Из лемм 3.6(2) и 3.7 вытекает равномерная по ε и k ограниченность оператора $T_6(\varepsilon,k)$. С учетом голоморфности оператора $T_5(k)$ отсюда следует ограниченная обратимость оператора $(\mathrm{I}+\varepsilon T_5(k)T_6(\varepsilon,k))$ для достаточно малых ε и k. Обозначим

$$T_7(\varepsilon,k):=(\mathrm{I}+\varepsilon T_5(k)T_6(\varepsilon,k))^{-1}.$$

Ясно, что верна равномерная по k сходимость:

$$T_7(\varepsilon,k)\to I,\qquad \varepsilon\to 0.\tag{3.29}$$

Применяя $T_7(\varepsilon,k)$ к уравнению (3.28) и учитывая равенство (3.24), получаем

$$\begin{aligned}&U-\frac{\varepsilon}{k}\big(T_6(\varepsilon,k)U,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}T_7(\varepsilon,k)\psi_0^{(0)}\\&=-\frac{1}{k}\big(F,\psi_0^{(0)}\big)_{L_2(-x_0,x_0)}T_7(\varepsilon,k)\psi_0^{(0)}+T_7(\varepsilon,k)T_5(k)T_1F.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Подействуем оператором $T_6(\varepsilon,k)$ на это уравнение, после чего вычислим скалярное произведение с $\psi_0^{(0)}$ в $W_2^1(-x_0,x_0)$ и умножим на k:

$$\begin{aligned}&(k-\varepsilon\mathfrak{g}(\varepsilon,k))\big(T_6(\varepsilon,k)U,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}\\&\quad=-\mathfrak{g}(\varepsilon,k)\big(F,\psi_0^{(0)}\big)_{L_2(-x_0,x_0)}+k\big(T_6(\varepsilon,k)T_7(\varepsilon,k)T_5(k)T_1F,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)},\\&\mathfrak{g}(\varepsilon,k):=\big(T_6(\varepsilon,k)T_7(\varepsilon,k)\psi_0^{(0)},\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Нетривиальные решения уравнения (3.25) с $F=0$ удовлетворяют уравнению (3.31) с $F=0$. Более того, для таких решений скалярное произведение $\big(T_6(\varepsilon,k)U,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}$ не может обращаться в нуль, иначе из (3.30) следовало бы $U=0$.

Таким образом, уравнение (3.25) с $F=0$ может иметь нетривиальное решение только для тех k, которые удовлетворяют уравнению

$$k=\varepsilon\mathfrak{g}(\varepsilon,k). \tag{3.32}$$

Соответствующее таким корням $k=k_\varepsilon$ нетривиальное решение уравнения (3.25), как следует из (3.30) с $F=0$, единственно с точностью до числового множителя и имеет вид

$$U_\varepsilon=T_7(\varepsilon,k_\varepsilon)\psi_0^{(0)}, \tag{3.33}$$

причем $U_\varepsilon\neq0$, так как в силу (3.29) имеет место следующая сходимость в $W_2^1(-x_0,x_0)$:

$$U_\varepsilon=T_7(\varepsilon,k_\varepsilon)\psi_0^{(0)}\to\psi_0^{(0)}\neq0.$$

Следовательно, уравнение (3.32) является уравнением на k, для которых существуют нетривиальные решения уравнения (3.25) с $F=0$.

Функция $\mathfrak{g}(\varepsilon,k)$ голоморфна по k и ограничена равномерно по ε и k. Поэтому за счет выбора ε правую часть в (3.32) можно сделать сколь угодно малой для $|k|=\delta$, где δ — малое фиксированное число. Отсюда по теореме Руше следует, что в круге $\{k:|k|\leqslant\delta\}$ функция $k\mapsto(k-\varepsilon\mathfrak{g}(\varepsilon,k))$ имеет столько же нулей, сколько и функция $k\mapsto k$. Следовательно, уравнение (3.32) имеет ровно один корень k_ε, причем $k_\varepsilon\to0$ при $\varepsilon\to0$. Соответствующее нетривиальное решение уравнения (3.25) с $F=0$ дается формулой (3.33). Данное нетривиальное решение будет элементом $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}k_\varepsilon>0$ (см. (3.13), (3.14), (3.19), (3.21)), а потому только в этом случае оператор H_ε имеет собственное значение $\lambda_\varepsilon=\mu_0^+(\varepsilon^2)-k_\varepsilon^2$, стремящееся к нулю при $\varepsilon\to0$.

Таким образом, доказана

Лемма 3.10. *Оператор H_ε имеет собственное значение, сходящееся к нулю при $\varepsilon\to0$, тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение задачи (1.6), а решение k_ε уравнения (3.32) удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}k_\varepsilon>0$. В случае существования данное собственное значение простое и имеет вид $\lambda_\varepsilon^{(0)}=\mu_0^+(\varepsilon^2)-k_\varepsilon^2$. Соответствующая собственная функция дается равенством*

$$\psi_\varepsilon^{(0)}(x)=\begin{cases}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)U_\varepsilon(x), & |x|<x_0,\\[2mm] \dfrac{\varphi\left(\pm\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)U_\varepsilon(\pm x_0)}{\Theta^\pm\left(\pm\frac{x_0}{\varepsilon},\varepsilon,k_\varepsilon\right)}\Theta^\pm\left(\dfrac{x}{\varepsilon},\varepsilon,k_\varepsilon\right), & \pm x\geqslant x_0,\end{cases}$$

и верна сходимость

$$\psi_\varepsilon^{(0)}\to\psi_0^{(0)},\qquad\varepsilon\to0 \tag{3.34}$$

в $W_2^1(Q)$ для любого $Q\in\mathfrak{C}$.

В § 5 мы покажем, что решение уравнения (3.32) удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}k_\varepsilon>0$, для чего нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.11. *При k, близких к нулю, для любой функции $F\in L_2(-x_0,x_0)$ верно представление*

$$(\mathrm{I}-2\varepsilon T_2(\varepsilon)+T_1V+(k^2-1)T_1+\rho_+T_3^+-\rho_-T_3^-)^{-1}T_1F=\frac{T_8(\varepsilon,k)F}{k-k_\varepsilon}U_\varepsilon+T_9(\varepsilon,k)F, \tag{3.35}$$

где $T_8(\varepsilon,k):L_2(-x_0,x_0)\to\mathbb{C}$, $T_9(\varepsilon,k):L_2(-x_0,x_0)\to W_2^1(-x_0,x_0)$ — линейные функционал и оператор, ограниченные равномерно по ε и k.

Доказательство. Закончим решение уравнения (3.25). Выразим из (3.31) скалярное произведение $\big(T_6(\varepsilon,k)U,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}$ и подставим результат в (3.30):

$$U=\frac{T_{10}(\varepsilon,k)F}{k-\varepsilon\mathfrak{g}(\varepsilon,k)}T_7(\varepsilon,k)\psi_0^{(0)}+T_7(\varepsilon,k)T_5(k)T_1F, \tag{3.36}$$

где

$$T_{10}(\varepsilon,k)F:=\big(T_6(\varepsilon,k)T_7(\varepsilon,k)T_5(k)T_1F,\psi_0^{(0)}\big)_{W_2^1(-x_0,x_0)}-\big(F,\psi_0^{(0)}\big)_{L_2(-x_0,x_0)},$$

В силу уравнения (3.32) выводим

$$k-\varepsilon\mathfrak{g}(\varepsilon,k)=(k-k_\varepsilon)\left(1+\varepsilon\widetilde{\mathfrak{g}}(\varepsilon,k)\right),$$

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(\varepsilon,k)=\frac{\mathfrak{g}(\varepsilon,k_\varepsilon)-\mathfrak{g}(\varepsilon,k)}{k-k_\varepsilon}.$$

Из леммы 3.6(2), голоморфности оператора $T_5(k)$ и определения операторов $T_6(\varepsilon,k)$, $T_7(\varepsilon,k)$ и функции $\mathfrak{g}(\varepsilon,k)$ вытекает, что производная $\dfrac{d}{dk}\mathfrak{g}(\varepsilon,k)$ ограничена равномерно по ε и k. Отсюда в силу леммы Адамара следует равномерная по ε и k оценка

$$|\widetilde{\mathfrak{g}}(\varepsilon,k)|\leqslant C.$$

Аналогично доказывается равномерная по ε и k оценка

$$\|T_7(\varepsilon,k)\psi_0^{(0)}-U_\varepsilon\|_{W_2^1(-x_0,x_0)}=\|(T_7(\varepsilon,k)-T_7(\varepsilon,k_\varepsilon))\psi_0^{(0)}\|_{W_2^1(-x_0,x_0)}\leqslant C|k-k_\varepsilon|.$$

Из последних двух оценок и (3.36) вытекает представление (3.35), где

$$T_8(\varepsilon,k)=\frac{T_{10}(\varepsilon,k)F}{1+\varepsilon\widetilde{\mathfrak{g}}(\varepsilon,k)},$$

$$T_9(\varepsilon,k)=\frac{(T_7(\varepsilon,k)-T_7(\varepsilon,k_\varepsilon))\psi_0^{(0)}}{k-\varepsilon\mathfrak{g}(\varepsilon,k)}T_{10}(\varepsilon,k)+T_7(\varepsilon,k)T_5(k)T_1.$$

Лемма доказана. □

§ 4. Асимптотики конечных собственных значений в полубесконечной лакуне

В настоящем параграфе мы построим асимптотические разложения собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n=-K,\dots,-1$, оператора H_ε. Также будут построены асимптотические разложения соответствующих собственных функций. Вначале мы проведем формальное построение асимптотических разложений, а затем строго их обоснуем.

Асимптотику собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ будем строить в виде ряда (1.7). Для построении асимптотики соответствующей собственной функции мы используем метод двухмасштабных асимптотических разложений (асимптотический метод усреднения) [**3**, **6**, **7**]. Следуя этому методу, асимптотику собственной функции ищем в виде

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x)=\psi_0^{(n)}(x)+\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon^i\psi_i^{(n)}(x,\xi), \tag{4.1}$$

где $\xi=x/\varepsilon$. Функции ψ_i будем искать 1-периодическими по второму аргументу. Собственная функция, соответствующая $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, должна быть элементом $L_2(\mathbb{R})$, поэтому на функции ψ_i наложим дополнительное условие: $\psi_i(x,x/\varepsilon)\in L_2(\mathbb{R})$.

Целью формального построения является определение коэффициентов рядов (1.7) и (4.1). Всюду в построении мы опускаем верхний индекс (n) в обозначениях $\lambda_i^{(n)}$ и $\psi_i^{(n)}$, подразумевая в то же время, что все функции, возникающие в процессе построения, также зависят от n.

Собственная функция, соответствующая $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, удовлетворяет уравнению (3.18) с $f=0$, $\lambda=\lambda_\varepsilon^{(n)}$. Поэтому подставим ряды (1.7), (4.1) в уравнение (3.18) с $f=0$, соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняем их нулю. Получим следующие уравнения:

$$-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\psi_{i+2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a-V\right)\psi_i+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\psi_{i+1}+\sum_{j=0}^{i-2}\lambda_j\psi_{i-j}+\lambda_i\psi_0,\quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^2,\quad i\geqslant 0. \tag{4.2}$$

где $a=a(\xi)$, $V=V(x)$, $\lambda_1=0$, $\psi_0(x,\xi):=\psi_0(x)$, $\psi_1(x,\xi):=0$. Следуя методу двухмасштабных асимптотических разложений, переменные x и ξ в этих уравнениях мы считаем независимыми. Согласно лемме 2.3 уравнения (4.2) имеют 1-периодические по ξ решения, если для их правых частей выполнены следующие условия разрешимости:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V-\lambda_0\right)\int\limits_0^1\psi_i\,\mathrm{d}\xi=-\int\limits_0^1 a\psi_i\,\mathrm{d}\xi+\sum_{j=2}^{i-2}\lambda_j\int\limits_0^1\psi_{i-j}\,\mathrm{d}\xi+\lambda_i\psi_0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Здесь мы также учли, что функция ψ_{i+1} предполагается 1-периодической по ξ. Обозначим

$$W_2^\infty(\mathbb{R}):=\bigcap_{p=1}^{\infty}W_2^p(\mathbb{R}).$$

В силу стандартных теорем вложения выполнено $W_2^\infty(\mathbb{R})\subset C^\infty(\mathbb{R})$ (см., например, [**32**, гл. III, § 6]. Очевидно, что $\psi_0\in W_2^\infty(\mathbb{R})$.

Для решения уравнений (4.2), (4.3) нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 4.1. *Уравнение*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V-\lambda_0\right)u=f,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{4.4}$$

где $f\in L_2(\mathbb{R})$, разрешимо в пространстве $W_2^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $(f,\psi_0)_{L_2(\mathbb{R})}=0$. В этом случае решение уравнения (4.4) единственно с точностью до слагаемого $C\psi_0$, $C=const$. Существует единственное решение $u\in W_2^2(\mathbb{R})$, ортогональное ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$. Если $f\in W_2^\infty(\mathbb{R})$, то $u\in W_2^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. Резольвента $(H_0-\lambda)^{-1}:L_2(\mathbb{R})\to W_2^2(\mathbb{R})$ мероморфна по λ в малой окрестности λ_0 и согласно [**27**, гл. V, § 3.5] имеет в точке λ_0 простой полюс, вычет в котором является проектором на ψ_0. Следовательно, резольвента $(H_0-\lambda_0)^{-1}$ является ограниченным оператором на ортогональном дополнении к ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$, что доказывает условие разрешимости уравнения (4.4) в пространстве $W_2^2(\mathbb{R})$. Если $f\in W_2^p(\mathbb{R})$, то, выражая $\dfrac{d^2u}{dx^2}$ из уравнения (4.4), нетрудно показать, что $u\in W_2^{p+2}(\mathbb{R})$. Следовательно, если $f\in W_2^\infty(\mathbb{R})$, то $u\in W_2^\infty(\mathbb{R})$. □

Очевидно, что уравнение (4.3) выполнено для $i=0,1$. Нетрудно проверить, что 1-периодическое по ξ решение уравнения (4.2) с $i=0$ имеет вид

$$\psi_2(x,\xi)=u_{2,0}(x)+\widetilde{\psi}_2(x,\xi),$$
$$\widetilde{\psi}_2(x,\xi)=u_{2,1}(x)\psi_{2,1}(\xi),$$

где $u_{2,0}$ — некоторая функция,

$$u_{2,1}(x)=\psi_0(x),\quad \psi_{2,1}(\xi)=-L_0[a](\xi). \tag{4.5}$$

Ясно, что $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi_{2,1} \in C^2(\mathbb{R})$. Условие $\psi_2\left(x, x/\varepsilon\right) \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено, если то же условие выполнено и для функции $u_{2,0}$, поэтому функцию $u_{2,0}$ ищем в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Подставим полученное выражение для ψ_2 в уравнение (4.3) с $i = 2$ и учтем, что в силу леммы 2.3 имеет место равенство

$$\int\limits_0^1 \psi_{2,1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

В результате получим уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V - \lambda_0\right) u_{2,0} = -\left(a, \psi_{2,1}\right)_{L_2(0,1)} \psi_0 + \lambda_2 \psi_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как правая часть этого уравнения является элементом $L_2(\mathbb{R})$, в силу леммы 4.1 уравнение разрешимо в $L_2(\mathbb{R})$, если имеет место равенство

$$-\left(a, \psi_{2,1}\right)_{L_2(0,1)} + \lambda_2 = 0.$$

Отсюда с учетом (2.10) и (4.5) вытекает формула (1.8) для λ_2. В свою очередь, из этого равенства следует, что $u_{2,0} = C\psi_0$. Константу C выберем из условия ортогональности $(u_{2,0}, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} = 0$, т.е. $u_{2,0} \equiv 0$. Таким образом, функция ψ_2 имеет вид

$$\psi_2(x,\xi) = \widetilde{\psi}_2(x,\xi) = u_{2,1}(x)\psi_{2,1}(\xi), \tag{4.6}$$

где $u_{2,1}$ и $\psi_{2,1}$ определяются равенствами (4.5). Остальные функции ψ_i и числа λ_i определяются следующей леммой.

Лемма 4.2. *Существуют решения уравнений* (4.2), (4.3) *вида*

$$\psi_i(x,\xi) = u_{i,0}(x) + \widetilde{\psi}_i(x,\xi), \tag{4.7}$$

$$\widetilde{\psi}_i(x,\xi) = L_0[G_i(x,\cdot)](\xi) = \sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_i} u_{i,j}(x)\psi_{i,j}(\xi), \tag{4.8}$$

$$G_i := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a - V\right)\widetilde{\psi}_{i-2} + \int\limits_0^1 a\widetilde{\psi}_{i-2}\,\mathrm{d}\xi + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\widetilde{\psi}_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-4} \lambda_j \widetilde{\psi}_{i-j-2} - a u_{i-2,0}, \tag{4.9}$$

где $G_i = G_i(x,\xi)$, $a = a(\xi)$, $V = V(x)$, $\widetilde{\psi}_0 = \widetilde{\psi}_1 := 0$, $u_{0,0} := \psi_0$, $\mathfrak{m}_i$ *— некоторые числа,* $u_{i,j} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$, $\psi_{i,j} \in C^2(\mathbb{R})$ *— 1-периодические функции, удовлетворяющие равенствам*

$$\int\limits_0^1 \psi_{i,j}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{4.10}$$

Функции $u_{i,0} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$ *являются решениями уравнений*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V - \lambda_0\right) u_{i,0} = -\int\limits_0^1 a\widetilde{\psi}_i\,\mathrm{d}\xi + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j u_{i-j,0} + \lambda_i \psi_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.11}$$

ортогональными ψ_0 *в* $L_2(\mathbb{R})$. *Числа* λ_i *определяются формулами*

$$\lambda_i = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^1 a(\xi)\psi_0(x)\widetilde{\psi}_i(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

Замечание 4.1. Запись $L_0[G_i(x,\cdot)]$ означает применение оператора L_0 к функции $G_i(x,\xi)$ как к функции переменной ξ, зависящей от дополнительного параметра x.

Доказательство. Применим индукцию. Для $i = 2$ утверждение леммы следует из формулы (1.8) для λ_2 и формул (4.5), (4.6) для функции $\psi_2(x, \xi)$. Кроме того, уравнение (4.2) выполнено для $i = 0$, а уравнение (4.3) выполнено для $i = 0, 1, 2$.

Пусть формулы (4.7)–(4.10) верны для $i \leqslant m + 1$, уравнения (4.2), (4.3), (4.11) и формулы (4.12) — для $i \leqslant m - 1$. Докажем, что тогда уравнения (4.2), (4.3) разрешимы для $i = m$ и их решения определяются согласно (4.7)–(4.11), а число λ_m дается формулой (4.12). В силу индукционного предположения функции $\psi_{i,j}$, $i \leqslant m$, удовлетворяют равенствам (4.10). Следовательно, условием разрешимости уравнения (4.2) с $i = m$ в классе 1-периодических по ξ функций является уравнение (4.3) с $i = m$. Подставим в это уравнение формулы (4.7) для ψ_i, $i \leqslant m$, которые верны в силу индукционного предположения, и учтем соотношения (4.10). Тогда получим уравнение (4.11) для функции $u_{m,0}$. В силу индукционного предположения правая часть этого уравнения является элементом пространства $W_2^\infty(\mathbb{R})$. Так как функции $u_{m,j}$, $j \geqslant 1$, принадлежат $W_2^2(\mathbb{R})$, для выполнения условия

$$\psi_m\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L_2(\mathbb{R})$$

достаточно потребовать выполнения принадлежности $u_{m,0} \in L_2(\mathbb{R})$. Условие разрешимости уравнения (4.11) с $i = m$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ дает лемма 4.1. Выписывая данное условие и учитывая ортогональность функций $u_{i,0}$, $i \leqslant m - 1$, функции ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$, приходим к равенству (4.12) для λ_m. Функцию $u_{m,0} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$ выберем ортогональной ψ_0 в $L_2(\mathbb{R})$.

Таким образом, условие разрешимости для уравнения (4.2) с $i = m$ выполнено. Правая часть уравнения (4.2) с $i = m$ в силу индукционного предположения и уравнения (4.11) для $u_{m,0}$ совпадает с функцией G_{m+2} из (4.9). Представим ее в виде

$$\begin{aligned}
&G_{m+2}(x, \xi) = G^{(1)}_{m+2}(x, \xi) + G^{(2)}_{m+2}(x, \xi), \qquad (4.13)\\
&G^{(1)}_{m+2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V\right)\widetilde{\psi}_m + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\widetilde{\psi}_{m+1} + \sum_{j=0}^{m-2} \lambda_j \widetilde{\psi}_{m-j} - a u_{m,0},\\
&G^{(2)}_{m+2} = -a\widetilde{\psi}_m + \int_0^1 a\widetilde{\psi}_m \, \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

В силу формул (4.8) для $\widetilde{\psi}_i$, $i \leqslant m + 1$, функции $G^{(i)}_{m+2}$, $i = 1, 2$, имеют вид конечных сумм

$$G^{(i)}_{m+2}(x, \xi) = \sum_j G^{(i,1)}_{m+2,j}(x) G^{(i,2)}_{m+2,j}(\xi), \qquad (4.14)$$

где $G^{i,1}_{m+2,j} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$. Из равенств (1.1) и (4.10) для $i \leqslant m + 1$ и определения функции $G^{(1)}_{m+2}$ следует, что

$$\int_0^1 G^{(1,2)}_{m+2,j}(\xi) \, \mathrm{d}\xi = 0 \qquad (4.15)$$

для всех j. Аналогичные равенства верны и для функций $G^{(2,2)}_{m+2,j}$, что следует непосредственно из определения функции $G^{(2)}_{m+2}$ и формулы (4.8) с $i = m$. Учитывая установленные свойства функции G_{m+2} и решая уравнение (4.2) с $i = m$ с помощью леммы 2.3, приходим к представлению (4.7), (4.8) для $\psi_{m+2}(x, \xi)$, где $u_{m+2,0}$ — некоторая функция, $u_{m+2,j} \in W_2^\infty(\mathbb{R})$, $j \geqslant 1$, а $\psi_{m+2,j} \in C^2(\mathbb{R})$ — 1-периодические функции, удовлетворяющие равенствам (4.10). $\square$

Докажем формулы (1.8) для λ_3 и λ_4. Используя (4.5)–(4.9), нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{m}_3 = 1, \quad u_{3,1} = 2\frac{du_{2,1}}{dx} = 2\frac{d\psi_0}{dx}, \quad \psi_{3,1} = L_0\left[\frac{d\psi_{2,1}}{d\xi}\right]. \qquad (4.16)$$

Из данных формул и определения функции $\psi_{2,1}$ выводим

$$\int\limits_0^1 a\psi_{3,1}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^1 \psi_{3,1}\frac{d^2\psi_{2,1}}{d\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^1 \psi_{2,1}\frac{d^2\psi_{3,1}}{d\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = -\int\limits_0^1 \psi_{2,1}\frac{d\psi_{2,1}}{d\xi}\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{4.17}$$

С учетом полученного равенства и (4.12) заключаем, что $\lambda_3 = 0$. Следовательно, уравнение (4.11) для $u_{3,0}$ является однородным, а потому

$$u_{3,0} \equiv 0. \tag{4.18}$$

Из (4.6)–(4.9), (4.12) следует, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{m}_4 = 2, \quad u_{4,1} = \psi_0, \quad \psi_{4,1} = L_0[\lambda_2 - a\psi_{2,1}],\\ u_{4,2} = 2\frac{dU_{3,1}}{dx} = 4\frac{d^2\psi_0}{dx^2}, \quad \psi_{4,2} = L_0\left[\frac{d\psi_{3,1}}{d\xi}\right].\end{gathered} \tag{4.19}$$

Отсюда в силу (4.12) и нормировки функции ψ_0 выводим

$$\lambda_4 = \int\limits_0^1 a\psi_{4,1}\,\mathrm{d}\xi + 4\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_0\frac{d^2\psi_0}{dx^2}\,\mathrm{d}x \int\limits_0^1 a\psi_{4,2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства совпадает с $\mu_{0,2}^+$ (см. (2.10), (4.5), (4.19)). Вычислим второе слагаемое:

$$\begin{gathered}4\int\limits_{\mathbb{R}} \psi\frac{d^2\psi_0}{dx^2}\,\mathrm{d}x = -4\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\psi_0}{dx}\right|^2\,\mathrm{d}x,\\ \int\limits_0^1 a\psi_{4,2}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^1 \psi_{4,2}\frac{d^2\psi_{2,1}}{d\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = -\int\limits_0^1 \psi_{2,1}\frac{d\psi_{3,1}}{d\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^1 |\psi_{2,1}|^2\,\mathrm{d}\xi,\end{gathered} \tag{4.20}$$

откуда уже следует формула (1.8) для λ_4.

Пусть $m \geqslant 2$. Введем обозначение

$$\begin{gathered}\psi_{\varepsilon,m}(x) := \psi_0(x) + \sum_{i=2}^m \varepsilon^i\psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),\\ \lambda_{\varepsilon,m} := \lambda_0 + \sum_{i=2}^{m-2}\varepsilon^i\lambda_i.\end{gathered}$$

Из леммы 4.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Функция $\psi_{\varepsilon,m}$ является элементом пространства $W_2^2(\mathbb{R})\cap C^\infty(\mathbb{R})$ и сходится к ψ_0 в $W_2^1(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$. Функция $f_{\varepsilon,m} := (H_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,m})\psi_{\varepsilon,m}$ удовлетворяет оценке*

$$\|f_{\varepsilon,m}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}).$$

Так как $f_{\varepsilon,m} \in L_2(\mathbb{R})$ и $\psi_{\varepsilon,m} = (H_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,m})^{-1}f_{\varepsilon,m}$, к функции $\psi_{\varepsilon,m}$ применима лемма 3.3 и, в частности, представление (3.10):

$$\psi_{\varepsilon,m} = -\frac{\psi_\varepsilon^{(n)}}{\lambda - \lambda_\varepsilon^{(n)}}\left(f_{\varepsilon,m}, \psi_\varepsilon^{(n)}\right)_{L_2(\mathbb{R})} + \widetilde{\psi}_{\varepsilon,m}, \tag{4.21}$$

где функция $\widetilde{\psi}_{\varepsilon,m}$ в силу (3.11) и леммы 4.3 удовлетворяет равномерной по ε оценке

$$\|\widetilde{\psi}_{\varepsilon,m}\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|f_{\varepsilon,m}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^{m-1}. \tag{4.22}$$

Из представления (4.21) выводим

$$\|\psi_{\varepsilon,m} - \widetilde{\psi}_{\varepsilon,m}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\|f_{\varepsilon,m}\|_{L_2(\mathbb{R})}}{|\lambda_\varepsilon^{(n)} - \lambda_{\varepsilon,m}|},$$

откуда, из оценки (4.22) и сходимости $\psi_{\varepsilon,m}$ к ψ_0 в $W_2^1(\mathbb{R})$ следует, что

$$|\lambda_\varepsilon^{(n)} - \lambda_{\varepsilon,m}| = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}),$$

что доказывает асимптотику (1.7) и завершает доказательство теоремы 1.2.

Умножая (4.21) на $\psi_\varepsilon^{(n)}$ скалярно в $L_2(\mathbb{R})$ и учитывая нормировку $\psi_\varepsilon^{(n)}$, получим

$$-\frac{\big(f_{\varepsilon,m}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_{\varepsilon,m} - \lambda_\varepsilon^{(n)}} = \big(\psi_{\varepsilon,m} - \widetilde{\psi}_{\varepsilon,m}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Из леммы 4.2 и (4.22) следует, что для любых m_1, m_2 выполнено

$$\big(\psi_{\varepsilon,m_1} - \widetilde{\psi}_{\varepsilon,m_1}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})} - \big(\psi_{\varepsilon,m_2} - \widetilde{\psi}_{\varepsilon,m_2}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\min\{m_1,m_2\}+1}).$$

Из последних двух равенств и лемм 3.2, 4.3 выводим, что существует функция $c(\varepsilon)$ такая, что

$$c(\varepsilon) = -\frac{\big(f_{\varepsilon,m}, \psi_\varepsilon^{(n)}\big)_{L_2(\mathbb{R})}}{\lambda_{\varepsilon,m} - \lambda_\varepsilon^{(n)}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}), \quad c(\varepsilon) = 1 + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.23}$$

для всех m. Равенства (4.21), (4.22), (4.23) приводят к соотношениям

$$\|\psi_{\varepsilon,m} - c(\varepsilon)\psi_\varepsilon^{(n)}\|_{W_2^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}).$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *Собственную функцию, соответствующую собственному значению* $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = -K, \ldots, -1$ *можно выбрать так, что в норме* $W_2^2(\mathbb{R})$ *она будет иметь асимптотическое разложение* (4.1)*, где коэффициенты разложения определяются равенствами* (4.5), (4.6), (4.16)*,* (4.18), (4.19) *и леммой* 4.2.

§ 5. Асимптотика малого собственного значения в полубесконечной лакуне

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1.3. Построение и обоснование асимптотических разложений собственных значений $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, $n = -K, \ldots, -1$, и соответствующих собственных функций в условиях теоремы 1.3 полностью совпадает с рассуждениями §4. Поэтому в данном параграфе мы исследуем только собственное значение оператора H_ε, сходящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Помимо доказательства утверждения теоремы 1.3 о данном собственном значении, будут также получены асимптотические разложения соответствующей собственной функции.

Всюду в этом параграфе предполагается, что задача (1.6) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условию (1.12).

Согласно лемме 3.10 в условиях теоремы 1.3 оператор H_ε имеет собственное значение, сходящееся к нулю, тогда и только тогда, когда для корня уравнения (3.32) выполнено $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$.

Мы построим асимптотическое разложение числа $\lambda_\varepsilon = \mu_0^+(\varepsilon^2) - k_\varepsilon^2$ и соответствующего нетривиального решения задачи (3.18), (3.19) с $f = 0$, $k = k_\varepsilon$, которое обозначим через ψ_ε. Затем на основе данных асимптотических разложений покажем, что $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$, λ_ε — искомое собственное значение оператора H_ε, а ψ_ε — соответствующая собственная функция. Как и в предыдущем параграфе, вначале мы построим формальные асимптотические разложения, а затем дадим их строгое обоснование.

Асимптотику λ_ε будем строить в виде ряда (1.10). Асимптотику соответствующего решения ψ_ε задачи (3.18), (3.19) с $f = 0$ будем строить на основе метода двухмасштабных асимптотических разложений в виде

$$\psi_\varepsilon(x) = h(x,\varepsilon)\left(\psi_0^{(0)}(x) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \psi_i^{(0)}(x,\xi)\right), \tag{5.1}$$

где

$$h(x,\tau_\varepsilon) = \chi(x) + (1-\chi(x))\,\mathrm{e}^{-\tau_\varepsilon |x|}, \tag{5.2}$$

$\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — четная вещественная срезающая функция, принимающая значения из отрезка $[0,1]$, равная единице в некоторой фиксированной окрестности носителя функции V и нулю при $|x| \geqslant x_0$. Символом τ_ε в (5.2) обозначена некоторая функция от ε, асимптотика которой строится следующим образом:

$$\tau_\varepsilon = \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon^i \tau_i. \tag{5.3}$$

Целью формального построения является определение вида функций $\psi_i^{(0)}$ и чисел $\lambda_i^{(0)}$, τ_i. Всюду в построении мы опускаем верхний индекс (0) в обозначениях $\psi_i^{(0)}$ и $\lambda_i^{(0)}$.

Через $\mathcal{V}$ обозначим подмножество функций $u = u(x)$ из $C(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $u(x) = u(\pm x_0)$, $\pm x \geqslant x_0$. Функции $\widetilde{\psi}_i(x,\xi)$ будем искать 1-периодическими по ξ и принадлежащими множеству $\mathcal{V}$ как функции переменной x.

Поясним выбор анзаца (5.1). Функция ψ_ε удовлетворяет равенствам (3.19) с $k = k_\varepsilon$. Поэтому асимптотическое разложение (5.1) выбиралось так, чтобы оно имело такую же структуру при $\pm x \geqslant x_0$, что и функции $\Theta^\pm$ из (3.19). Функция $h(x,\varepsilon)$ в (5.1) моделирует экспоненты, присутствующие в качестве множителя в функциях $\Theta^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon, k_\varepsilon\right)$ (см. (3.14)). Подчеркнем также, что функция h положительна. Требование 1-периодичности функций ψ_i по ξ соответствует 1-периодичности функции $\Theta^\pm_{\mathrm{per}}$. Этим же объясняется и условие $\psi_i(\cdot,\xi) \in \mathcal{V}$. Априорный выбор нижних пределов суммирования в рядах (1.10), (5.1), (5.3) связан с тем, что в ходе построения асимптотик, приведенного ниже, коэффициенты при отсутствующих степенях ε оказываются нулевыми. По этой причине мы не вводим их, что также упрощает вид уравнений, возникающих при определении остальных коэффициентов рядов (1.10), (5.1), (5.3).

Подставим ряды (1.10), (5.1), (5.3) в уравнение (3.18) с $f = 0$, поделим это уравнение на $h(x,\tau_\varepsilon)$, разложим в ряд по степеням ε и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\psi_{i+2} =& 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\psi_{i+1} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V - a\right)\psi_i + 2\sum_{j=4}^{i-1} h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\psi_{i-j+1} \\ &+ \sum_{j=2}^{i}\left(2h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial x} + h_j^{(2)} + \lambda_j\right)\psi_{i-j}, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^2, \quad i \geqslant 0,\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $V = V(x)$, $a = a(\xi)$, $\psi_1 := 0$, $h_i^{(1)} = h_i^{(2)} := 0$, $i = 2,3$. Функции $h_i^{(1)} = h_i^{(1)}(x,\boldsymbol{\tau}_i)$ и $h_i^{(2)} = h_i^{(2)}(x,\boldsymbol{\tau}_i)$, $i \geqslant 4$, $\boldsymbol{\tau}_i := (\tau_4,\ldots,\tau_i)$, являются коэффициентами разложения в асимптотический ряд по степеням ε функций $h'(x,\tau_\varepsilon)/h(x,\tau_\varepsilon)$ и $h''(x,\tau_\varepsilon)/h(x,\tau_\varepsilon)$ соответственно. Функции $h_i^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R})$ представимы в виде

$$h_i^{(j)}(x,\boldsymbol{\tau}_i) = -\tau_i\frac{d^j}{dx^j}\left(|x|(1-\chi(x))\right) + \widetilde{h}_i^{(j)}(x,\boldsymbol{\tau}_{i-1}), \quad j = 1,2, \tag{5.5}$$

где $\widetilde{h}_i^{(j)} \in C^\infty(R)\cap\mathcal{V}$ и, в частности,

$$\widetilde{h}_4^{(1)}(x) = \widetilde{h}_4^{(2)}(x) = 0.$$

Отметим также, что при $\pm x \geqslant x_0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} &h_i^{(1)}(x,\boldsymbol{\tau}_i) = \mp\tau_i,\\ &h_i^{(2)}(x,\boldsymbol{\tau}_i) = \sum_{j=4}^{i-4}\tau_j\tau_{i-j}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Данные равенства вытекают из (5.3) и следующих соотношений:

$$\frac{h'(x,\tau_\varepsilon)}{h(x,\tau_\varepsilon)} = \mp\tau_\varepsilon, \quad \frac{h''(x,\tau_\varepsilon)}{h(x,\tau_\varepsilon)} = \tau_\varepsilon^2, \quad \pm x \geqslant x_0. \tag{5.7}$$

Согласно лемме 2.3 условием разрешимости уравнений (5.4) в классе 1-периодических по ξ функций является равенство

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)\int\limits_0^1 \psi_i\,\mathrm{d}\xi\\ &= -\int\limits_0^1 a\psi_i\,\mathrm{d}\xi + \sum_{j=2}^{i}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx} + h_j^{(2)} + \lambda_j\right)\int\limits_0^1 \psi_{i-j}\,\mathrm{d}\xi, \quad x\in\mathbb{R}, \quad i\geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $a = a(\xi)$. При выводе данного уравнения мы учли, что функции ψ_j, $j \leqslant i+1$, предполагаются 1-периодическими по ξ. Для $i = 0, 1$ уравнение (5.8) выполнено в силу (1.1), (1.6) и равенства $\psi_1 = 0$. Следовательно, уравнение (5.4) с $i = 0, 1$ разрешимо. Легко убедиться, что 1-периодические по ξ решения уравнения (5.4) с $i = 0, 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\psi_i(x,\xi) = u_{i,0}(x) + \widetilde{\psi}_i(x,\xi), && \widetilde{\psi}_i(x,\xi) = u_{i,1}(x)\psi_{i,1}(\xi), \quad i = 2,3,\\ &\psi_{2,1}(\xi) = -L_0[a](\xi), && \psi_{3,1}(\xi) = -L_0\left[\frac{d\psi_{2,1}}{d\xi}\right](\xi),\\ &u_{2,1}(x) = \psi_0(x), && u_{3,1} = 2\frac{d}{dx}\psi_0(x), \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $u_{2,0}$, $u_{3,0}$ — некоторые функции. Ясно, что $\psi_{2,1}, \psi_{3,1} \in C^2(\mathbb{R})$, $u_{2,1}, u_{3,1} \in C^\infty(\mathbb{R})\cap\mathcal{V}$.

Уравнения (5.4), (5.8) разрешимы и при $i \geqslant 2$. Для доказательства этого факта нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Уравнение*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)u = f, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{5.10}$$

где $f \in C(\mathbb{R})$, имеет решение $u \in C^2(\mathbb{R})\cap\mathcal{V}$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp} f \subseteq [-x_0, x_0]$ *и выполнено равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f\psi_0\,\mathrm{d}x = 0.$$

В этом случае решение уравнения (5.10) единственно с точностью до слагаемого $C\psi_0$, $C = const$. Существует единственное решение уравнения (5.10), удовлетворяющее равенству

$$\beta_- u(x_0) + \beta_+ u(-x_0) = 0. \tag{5.11}$$

Данное решение имеет вид $u(x) = S[f](x)$,

$$S[f](x)=\psi_0(x)\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\widetilde{\psi}_0(t)\,\mathrm{d}t+\widetilde{\psi}_0(x)\int\limits_{x}^{+\infty} f(t)\psi_0(t)\,\mathrm{d}t-\frac{\psi_0(x)}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{\psi}_0(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $\widetilde{\psi}_0$ — *решение уравнения из* (1.6) *такое, что* $W_x(\psi_0,\widetilde{\psi}_0)\equiv 1$. *Если* $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, *то* $u\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Утверждение данной леммы проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 5.2. *Существуют решения уравнений* (5.4), (5.8) *вида*

$$\psi_i(x,\xi)=u_{i,0}(x)+\widetilde{\psi}_i(x,\xi), \tag{5.12}$$

$$\widetilde{\psi}_i(x,\xi)=L_0[G_i(x,\cdot)](x,\xi)=\sum_{j=1}^{\mathfrak{m}_i} u_{i,j}(x)\psi_{i,j}(\xi), \tag{5.13}$$

$$u_{i,0}(x)=S[f_i](x), \tag{5.14}$$

$$f_i=\sum_{j=2}^{i}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx}+h_j^{(2)}+\lambda_j\right)u_{i-j,0}-\int\limits_0^1 a\widetilde{\psi}_i\,\mathrm{d}\xi, \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}G_i={}&2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\widetilde{\psi}_{i-1}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-V-a\right)\widetilde{\psi}_{i-2}+\int\limits_0^1 a\widetilde{\psi}_{i-2}\,\mathrm{d}\xi\\&+2\sum_{j=4}^{i-3}h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{\psi}_{i-j-1}+\sum_{j=2}^{i-4}\left(2h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+h_j^{(2)}+\lambda_j\right)\widetilde{\psi}_{i-j-2}-au_{i-2,0},\end{aligned} \tag{5.16}$$

где $\mathfrak{m}_i$ — *некоторые числа*, $G_i=G_i(x,\xi)$, $f_i=f_i(x)$, $a=a(\xi)$, $V=V(x)$, $\widetilde{\psi}_1:=0$, $u_{0,0}:=\psi_0$, $u_{1,0}:=0$, $u_{i,j}\in C^\infty(\mathbb{R})\cap\mathcal{V}$, $\operatorname{supp} f_i\subseteq[-x_0,x_0]$, *а функции* $\psi_{i,j}$ — 1*-периодичны и удовлетворяют равенствам*

$$\int\limits_0^1 \psi_{i,j}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0. \tag{5.17}$$

Числа λ_i *и* τ_i *даются формулами*

$$\lambda_i=-\sum_{j=4}^{i-4}\tau_j\tau_{i-j}+\mathfrak{a}_{i,+},\qquad \tau_i=\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0\widetilde{f}_i\,\mathrm{d}x, \tag{5.18}$$

где

$$\widetilde{f}_i:=\sum_{j=2}^{i-2}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx}+h_j^{(2)}+\lambda_j\right)u_{i-j,0}+\left(2\widetilde{h}_i^{(1)}\frac{d}{dx}+\widetilde{h}_i^{(2)}+\lambda_i\right)\psi_0-\int\limits_0^1 a\widetilde{\psi}_i\,\mathrm{d}\xi, \tag{5.19}$$

$\mathfrak{a}_{i,+}$ *определено в* (5.21), $\widetilde{f}_i=\widetilde{f}_i(x)$, $\operatorname{supp}\widetilde{f}_i\subseteq[-x_0,x_0]$.

Доказательство. Утверждение леммы для ψ_2, ψ_3 следует из (5.9). Формулы (5.18) справедливы для λ_1 и τ_1, если положить $\lambda_1=\tau_1:=0$. Отметим также, что уравнения (5.4), (5.8) выполнены для $i=0,1$. Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть равенства (5.12), (5.13), (5.17) выполнены для $i\leqslant m+1$, а формулы (5.14), (5.18) верны для $i\leqslant m-1$. Докажем, что в этом случае верно утверждение леммы о ψ_{m+2}, $u_{m,0}$, λ_m, τ_m.

Согласно индукционному предположению функции $\psi_{i,j}$, $i\leqslant m+1$, удовлетворяют равенствам (5.17). Учитывая данные равенства и (1.1), подставим представления (5.12) в уравнение (5.8) с $i=m$. Получим следующее уравнение для $u_{m,0}$:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)u_{m,0}=f_m,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{5.20}$$

где f_m дается формулой (5.15). В силу индукционного предположения $u_{i,0} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$, $i \leqslant m-1$, и $u_{m,j} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$, $j \geqslant 1$, а потому $f_m \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$. Докажем, что $\operatorname{supp} f_m \subseteq [-x_0, x_0]$. Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{f}_{m,\pm} := \frac{f_m(x_0)}{2\beta_+} \pm \frac{f_m(-x_0)}{2\beta_-},\\
&\mathfrak{u}_i := \frac{u_{i,0}(x_0)}{2\beta_+} - \frac{u_{i,0}(-x_0)}{2\beta_-},\\
&\widehat{\psi}_{i,\pm}(\xi) := \frac{\widetilde{\psi}_i(x_0,\xi)}{2\beta_+} \pm \frac{\widetilde{\psi}_i(-x_0,\xi)}{2\beta_-},\\
&\mathfrak{a}_{i,\pm} := \int\limits_0^1 a(\xi)\widehat{\psi}_{i,\pm}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Ясно, что вложение $\operatorname{supp} f_m \subseteq [-x_0, x_0]$ эквивалентно равенствам $\mathfrak{f}_{m,\pm} = 0$. Вычислим числа $\mathfrak{f}_{m,\pm}$. Из формулы (5.15) для f_m, равенств (5.6) и условия (5.11) для $u_{i,0}$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, выводим

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{f}_{m,+} = -\mathfrak{a}_{m,+} + \mathfrak{l}_m, \quad \mathfrak{f}_{m,-} = -\mathfrak{a}_{m,-} + \sum_{j=2}^{m-2} \mathfrak{l}_{m-j}\mathfrak{u}_j,\\
&\mathfrak{l}_i := \lambda_i + \sum_{j=4}^{i-4} \tau_j \tau_{i-j}.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Равенство $\mathfrak{f}_{m,+} = 0$ является следствием формулы (5.18) для λ_m.

Докажем, что $\mathfrak{f}_{m,-} = 0$. Из (5.9) и равенства $\widetilde{\psi}_1 = 0$ выводим

$$
\widehat{\psi}_{1,\pm} = 0, \quad \widehat{\psi}_{2,+} = \psi_{2,1}, \quad \widehat{\psi}_{2,-} = 0, \quad \widehat{\psi}_{3,\pm} = 0. \tag{5.23}
$$

Отсюда и из индукционного предположения следует, что функции $\widehat{\psi}_{i+2,\pm}$, $i \leqslant m-1$, являются 1-периодическими решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\psi}_{2,+} = a,\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\psi}_{i+2,+} = a\widehat{\psi}_{i,+} - \mathfrak{a}_{i,+} + 2\sum_{j=4}^{i-1} \tau_j \frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,-} - \sum_{j=2}^{i-2} \mathfrak{l}_j \widehat{\psi}_{i-j,+},\\
&\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\psi}_{i+2,-} = a\widehat{\psi}_{i,-} - \mathfrak{a}_{i,-} + 2\sum_{j=4}^{i-1} \tau_j \frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,+} - \sum_{j=2}^{i-2} \mathfrak{l}_j \widehat{\psi}_{i-j,-} + a\mathfrak{u}_i, \quad \xi \in \mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

где $i \geqslant 1$. В силу равенств (5.18) для λ_i, $i \leqslant m-1$, имеем

$$
\mathfrak{l}_i = \mathfrak{a}_{i,+}, \quad i \leqslant m-1.
$$

Учитывая данные равенства и (5.17), умножим уравнение для $\widehat{\psi}_{i+2,+}$ из (5.24) на $\widehat{\psi}_{m-i,+}$ скалярно в $L_2(0,1)$ и просуммируем по $i = 2, \ldots, m-2$. Получим

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m-2} \mathfrak{l}_{m-i}\mathfrak{u}_i = {}& \sum_{i=2}^{m-2} \left(\widehat{\psi}_{m-i,+}, \frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\psi}_{i+2,-}\right) - \sum_{i=2}^{m-2} \left(\widehat{\psi}_{m-i,+}, a\widehat{\psi}_{i,-}\right)\\
&- 2\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=4}^{i-1} \tau_j \left(\widehat{\psi}_{m-i,+}, \frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,+}\right) + \sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=2}^{i-2} \mathfrak{l}_j \left(\widehat{\psi}_{m-i,+}, \widehat{\psi}_{i-j,-}\right).
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Здесь и до конца доказательства выражение $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2(0,1)$. Третье слагаемое в правой части данного равенства равно нулю, что следует из соотношений

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=4}^{i-1}\tau_j\Big(\widehat{\psi}_{m-i,+},\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,+}\Big)\\
&=\sum_{j=4}^{m-3}\tau_j\sum_{i=j+1}^{m-2}2\Big(\widehat{\psi}_{m-i,+},\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,+}\Big)\\
&=\sum_{j=4}^{m-3}\tau_j\left(\sum_{i=j+1}^{m-2}\Big(\widehat{\psi}_{m-i,+},\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,+}\Big)+\sum_{\widetilde{i}=j+1}^{m-2}\Big(\widehat{\psi}_{\widetilde{i}-j+1,+},\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{m-\widetilde{i},+}\Big)\right)=0,
\end{aligned}\tag{5.26}$$

где $\widetilde{i}=m-i+j-1$. Из полученных равенств следует, что третье слагаемое в правой части (5.25) равно нулю. Делая замены индексов $i\mapsto m-i+2$, $i\mapsto m-i$ в первом и втором слагаемых в правой части (5.25), интегрируя затем по частям в первом слагаемом и используя (5.17), (5.23) и (5.24), выводим

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m-2}\mathfrak{l}_{m-i}\mathfrak{u}_i&=\sum_{i=0}^{m-4}\Big(\widehat{\psi}_{m-i,-},\frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{\psi}_{i+2,+}\Big)-\sum_{i=2}^{m-2}\Big(\widehat{\psi}_{i,+},a\widehat{\psi}_{m-i,-}\Big)\\
&+\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=2}^{i-2}\mathfrak{l}_j\Big(\widehat{\psi}_{m-i,+},\widehat{\psi}_{i-j,-}\Big)=\mathfrak{a}_{m,-}+2\sum_{i=1}^{m-4}\sum_{j=4}^{i-1}\tau_j\Big(\widehat{\psi}_{m-i,-},\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}_{i-j+1,-}\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{m-4}\sum_{j=2}^{i-2}\mathfrak{l}_j\Big(\widehat{\psi}_{m-i,-},\widehat{\psi}_{i-j,+}\Big)+\sum_{i=2}^{m-2}\sum_{j=2}^{i-2}\mathfrak{l}_j\Big(\widehat{\psi}_{m-i,+},\widehat{\psi}_{i-j,-}\Big).
\end{aligned}$$

Аналогично (5.26) нетрудно показать, что второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Учитывая (5.23) и применяя к последнему слагаемому лемму 2.6 с $p=m$, $s=2$, $A_0=A_1=0$, $A_j=\mathfrak{l}_j$, $j\geqslant 2$, $B_{i,j}=\big(\widehat{\psi}_{i,+},\widehat{\psi}_{j,-}\big)$, приходим к равенству

$$\sum_{i=2}^{m-2}\mathfrak{l}_{m-i}\mathfrak{u}_i=\mathfrak{a}_{m,-},$$

откуда в силу (5.22) следует $\mathfrak{f}_{m,-}=0$. Вложение $\operatorname{supp}f_m\subseteq[-x_0,x_0]$ доказано.

В силу (5.5), (5.15) функция f_m представима в виде

$$f_m(x)=-\tau_m\left(\psi_0(x)\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d\psi_0(x)}{dx}\frac{d}{dx}\right)(|x|(1-\chi(x)))+\widetilde{f}_m(x),$$

где $\widetilde{f}_m$ определяется равенством (5.19). Функция $\widetilde{f}_m$ финитна, так как функции f_m и $\left(\psi_0(x)\dfrac{d^2}{dx^2}+2\dfrac{d\psi_0(x)}{dx}\dfrac{d}{dx}\right)(|x|(1-\chi(x)))$ финитны.

В силу леммы 5.1 уравнение (5.20) разрешимо в пространстве $\mathcal{V}$, если выполнено условие разрешимости

$$\begin{aligned}
0=\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(x)f_m(x)\,\mathrm{d}x&=-\tau_m\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx}\left(\psi_0^2(x)\frac{d}{dx}\left(|x|(1-\chi(x))\right)\right)\mathrm{d}x\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(x)\widetilde{f}_m(x)\,\mathrm{d}x=-\tau_m+\int\limits_{\mathbb{R}}\psi_0(x)\widetilde{f}_m(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

откуда следует равенство (5.18) для τ_m. Согласно лемме 5.1 решение $u_{m,0}$ уравнения (5.20) дается формулой (5.14).

Подставляя представления (5.12) с $i\leqslant m+1$ в уравнение (5.4) с $i=m$ и учитывая (5.20), получаем

$$-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\psi_{m+2}=G_{m+2},\quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^2,\tag{5.27}$$

где G_{m+2} определяется формулой (5.16). Используя (5.13), (5.17) с $i \leqslant m+1$, аналогично (4.13)–(4.15) нетрудно показать, что функция G_{m+2} имеет вид конечной суммы

$$G_{m+2}(x,\xi) = \sum_{p} G^{(1)}_{m+2,p}(x) G^{(2)}_{m+2,p}(\xi),$$

где $G^{(1)}_{m+2,p} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$, $G^{(2)}_{m+2,p} \in C^2(\mathbb{R})$ — 1-периодические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\int\limits_0^1 G^{(2)}_{m+2,p}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Подставляя полученное представление для G_{m+2} в уравнение (5.27) и решая затем это уравнение с помощью леммы 2.3, приходим к формулам (5.12), (5.13) для ψ_{m+2}, где $u_{m+2,0}$ — некоторая функция, $u_{m+2,j} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$, $j \geqslant 1$, а $\psi_{m+2,j} \in C^2(\mathbb{R})$ — 1-периодические функции, удовлетворяющие равенствам (5.17). $\square$

Докажем формулы (1.11). Из (2.10), (5.9), (5.21), (5.23) следует, что

$$\psi_{2,1} = \zeta^+_{0,1}, \quad \mathfrak{a}_{2,+} = \int\limits_0^1 a\zeta^+_{0,1}\,\mathrm{d}\xi = \mu^+_{0,1}, \quad \mathfrak{a}_{3,+} = 0, \tag{5.28}$$

откуда и из (5.18) выводим формулы (1.11) для λ_2, λ_3. Используя определение (5.15) функций f_i, формулы (5.9) и равенство $\lambda_2 = 0$, нетрудно проверить, что $f_2 = 0$, откуда и из (5.14) вытекает тождество

$$u_{2,0}(x) \equiv 0. \tag{5.29}$$

Из (5.9), (5.15) и формул (1.11) для λ_2 и λ_3 следует, что

$$f_3 = -2\frac{d\psi_0}{dx} \int\limits_0^1 a\psi_{3,1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Функции $\psi_{2,1}$, $\psi_{3,1}$, определенные в (5.9), совпадают с функциями $\psi_{2,1}$, $\psi_{3,1}$ из (4.5), (4.16), а потому в силу (4.17) $f_3 = 0$. Из (5.14) следует, что

$$u_{3,0} \equiv 0. \tag{5.30}$$

Из данного равенства, (5.9), (5.16), (5.28), (5.29) и формул (1.11) для λ_2, λ_3 выводим

$$G_4(x,\xi) = 4\frac{d^2}{dx^2}\psi_0(x)\frac{d}{d\xi}\psi_{3,1}(\xi) + (-a(\xi)\zeta^+_{0,2}(\xi) + \mu^+_{0,1})\psi_0(x),$$

откуда в силу (5.13) и (2.10) следует, что

$$\mathfrak{m}_4 = 2, \quad u_{4,1} = \psi_0, \quad \psi_{4,1} = \zeta^+_{0,2}, \quad u_{4,2} = 4\frac{d^2\psi_0}{dx^2}, \quad \psi_{4,2} = L_0\left[\frac{d\psi_{3,1}}{d\xi}\right]. \tag{5.31}$$

Таким образом,

$$\widehat{\psi}_{4,+} = \zeta^+_{0,2}, \quad \widehat{\psi}_{4,-} = 0, \quad \mathfrak{a}_{4,+} = \mu^+_{0,2}, \tag{5.32}$$

и верна формула (1.11) для λ_4. Формулы (1.11) для λ_2, λ_4, (5.18), (5.19) и равенства (2.10), (5.9), (5.29), (5.31) позволяют определить τ_4:

$$\tau_4 = -4\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_0 \frac{d^2\psi_0}{dx^2}dx \int\limits_0^1 a\psi_{4,2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Так как функция $\psi_{4,2}$ из (5.31) совпадает с функцией $\psi_{4,2}$ из (4.19), в силу (4.20) выводим

$$\tau_4 = 4\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\psi_0}{dx}\right|^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 |\zeta_{0,1}^+|^2 \,\mathrm{d}\xi. \tag{5.33}$$

Из (5.23), (5.28) следует, что правая часть уравнения (5.24) для $\widehat{\psi}_{5,+}$ равна нулю, а потому $\widehat{\psi}_{5,+} = 0$, что в силу (5.21) дает $\mathfrak{a}_{5,+} = 0$. Аналогично с учетом равенств $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{a}_{i,+}$, установленных в доказательстве леммы 5.2, проверяется, что $\mathfrak{a}_{7,+} = 0$. Из равенств $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{a}_{i,+}$ и (2.10), (5.23), (5.28), (5.32) следует, что уравнение (5.24) для $\widehat{\psi}_{6,+}$ совпадает с уравнением (2.9) для $\zeta_{0,3}^+$, а потому $\widehat{\psi}_{6,+} = \zeta_{0,3}^+$, откуда в силу (2.10) выводим: $\mathfrak{a}_{6,+} = \mu_{0,3}^+$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{a}_{8,+} = \mu_{0,4}^+$. Из (5.18), (5.33) вытекают формулы (1.11) для λ_6, λ_7, λ_8.

Пусть $m \geqslant 8$. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\tau_{\varepsilon,m} := \sum_{i=4}^{m} \varepsilon^i \tau_i,\\
&\lambda_{\varepsilon,m} := \sum_{i=2}^{m} \varepsilon^i \lambda_i,\\
&\psi_{\varepsilon,m}(x) := h(x,\tau_{\varepsilon,m})\left(\psi_0(x) + \sum_{i=2}^{m} \varepsilon^i \psi_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right).
\end{aligned}$$

Из уравнений (5.4), равенств (5.9), (5.33) и леммы 5.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Функция $\psi_{\varepsilon,m} \in C^2(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к ψ_0 в норме $W_2^1(Q)$ для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Функции $\psi_{\varepsilon,m}$ и $\lambda_{\varepsilon,m}$ удовлетворяют уравнению*

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \lambda_{\varepsilon,m}\right)\psi_{\varepsilon,m} = h(x,\tau_{\varepsilon,m}) f_{\varepsilon,m}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.34}$$

где для функции $f_{\varepsilon,m} \in C(\mathbb{R})$ справедлива оценка

$$\max_{\mathbb{R}} |f_{\varepsilon,m}(x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}). \tag{5.35}$$

Положим

$$k_{\varepsilon,m} := \sqrt{\mu_0^+(\varepsilon^2) - \lambda_{\varepsilon,m}}.$$

В силу (1.2), (1.11) верно неравенство

$$\mu_0^+(\varepsilon^2) > \lambda_{\varepsilon,m}.$$

Поэтому будем считать, что $k_{\varepsilon,m} > 0$. Из (1.2), (1.11) следует, что

$$k_{\varepsilon,m} = \varepsilon^4 \tau_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \tag{5.36}$$

где $\tau_4 > 0$ (см. (5.33)). Пусть

$$\tau_m(\varepsilon) := \varepsilon^{-1} \ln \varkappa(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}),$$

где $\varkappa$ такое же, как в (3.12). Тогда из (3.13) и (5.36) вытекает

$$\tau_m(\varepsilon) = \varepsilon^4 \tau_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \tag{5.37}$$

Лемма 5.4. *Для любого m имеет место равенство*

$$\tau_m(\varepsilon) = \tau_{\varepsilon,m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-5}).$$

Доказательство. Из (5.2), (5.9) и леммы 5.2 следует, что при $x \geqslant x_0$ функцию $\psi_{\varepsilon,m}(x)$ можно представить в виде

$$\psi_{\varepsilon,m}(x) = \mathrm{e}^{-\tau_{\varepsilon,m}x}\psi^{per}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{5.38}$$

где

$$\psi^{per}_{\varepsilon,m}(\xi) = \beta_+ + \varepsilon^2\widetilde{\psi}^{per}_{\varepsilon,m}(\xi),$$

1-периодическая функция $\widetilde{\psi}^{per}_{\varepsilon,m}$ ограничена равномерно по ε в норме пространства $C[0,1]$. Используя данное представление, определение функции Θ^+, равенство (3.14) и уравнение (5.34), нетрудно проверить, что функция

$$\mathcal{U}(x,\varepsilon) := W_x\left(\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \psi^{per}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + (\tau_m(\varepsilon) - \tau_{\varepsilon,m})\,\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi^{per}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{5.39}$$

где

$$\Theta^+_{\mathrm{per}}(\xi) := \Theta^+_{\mathrm{per}}(\xi,\varepsilon,k_{\varepsilon,m}),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\mathcal{U}(x,\varepsilon) - (\tau_{\varepsilon,m} + \tau_m(\varepsilon))\mathcal{U}(x,\varepsilon) = -\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f_{\varepsilon,m}(x), \quad x \geqslant x_0. \tag{5.40}$$

Проинтегрируем данное уравнение по x от x_0 до $(x_0+\varepsilon)$ и учтем ε-периодичность функций $\psi^{per}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. В результате приходим к равенству

$$\left(\tau^2_{\varepsilon,m} - \tau^2_m(\varepsilon)\right)\int\limits_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi^{per}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f_{\varepsilon,m}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.41}$$

Из (3.17) и (5.38) вытекает, что интеграл в левой части последнего равенства удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi^{per}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x = \varepsilon\beta_+ + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

откуда и из (5.35), (5.41) выводим

$$\tau^2_{\varepsilon,m} - \tau^2_m(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}). \tag{5.42}$$

Утверждение леммы вытекает из полученного равенства и (5.36), (5.37). □

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.5. *Существует функция $R_{\varepsilon,m}(x) \in C^2(\mathbb{R})$ такая, что функция*

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon,m} := \psi_{\varepsilon,m}(x) - R_{\varepsilon,m}(x)$$

удовлетворяет уравнению (3.18) *с* $\lambda = \lambda_{\varepsilon,m}$, $f(x) = \widehat{f}_{\varepsilon,m}(x)$, $\operatorname{supp}\widehat{f}_{\varepsilon,m} \subseteq [-x_0,x_0]$, *и условиям* (3.19) *с* $k = k_{\varepsilon,m}$, *и для любого интервала* $Q \in \mathfrak{C}$ *верны оценки*

$$\begin{aligned} &\|R_{\varepsilon,m}\|_{C^2(\overline{Q})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}),\\ &\|\widehat{f}_{\varepsilon,m}\|_{C[-x_0,x_0]} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Доказательство. Всюду в доказательстве для краткости обозначаем

$$\Theta^\pm(\xi) := \Theta^\pm(\xi,\varepsilon,k_{\varepsilon,m}).$$

Вычислим вронскиан функций $\Theta^+\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ и $\Theta^-\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, причем учтем равенства (3.15), (3.16), (5.37) и лемму 3.5:

$$\begin{aligned} W(\varepsilon) &:= W_x\left(\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \Theta^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \varepsilon^{-1} W_\xi\left(\Theta^+(\xi), \Theta^-(\xi)\right) \\ &= \varepsilon^{-1}\Theta_2(1, \varepsilon^2, k^2_{\varepsilon,m})\left(\mathrm{e}^{\tau_m(\varepsilon)} - \mathrm{e}^{-\tau_m(\varepsilon)}\right) = 2\varepsilon^3\tau_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Так как $W(\varepsilon) \neq 0$, функции $\Theta^\pm$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \lambda_{\varepsilon,m}\right)u = f, \tag{5.45}$$

с $f = 0$. Пусть $R_\pm = R_\pm(x, \varepsilon)$ — решения данного уравнения с $f(x) = h(x, \tau_{\varepsilon,m}) f_{\varepsilon,m}(x)$, определяемые формулами

$$R_\pm(x) = \frac{1}{W(\varepsilon)} \int\limits_{\pm x_0}^{x} \left(\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Theta^-\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \Theta^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Theta^+\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) h(t, \tau_{\varepsilon,m}) f_{\varepsilon,m}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.46}$$

Ясно, что $R_\pm \in C^2(\mathbb{R})$. В силу уравнений (5.34), (5.45) и финитности V функция $(\psi_{\varepsilon,m}(x) - R_+(x,\varepsilon))$ при $x \geqslant x_0$ является решением уравнения (5.45) с однородной правой частью, а потому верно равенство

$$\psi_{\varepsilon,m}(x) - R_+(x,\varepsilon) = C_+^+\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + C_+^-\Theta^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \geqslant x_0. \tag{5.47}$$

Оценим коэффициент C_+^-. Выбирая в (5.46) $x \geqslant x_0$ и заменяя функцию $h(t, \tau_{\varepsilon,m}) f_{\varepsilon,m}(t)$ на левую часть уравнения (5.34), интегрированием по частям получаем

$$C_+^- = \left.\frac{W_x\left(\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \psi_{\varepsilon,m}(x)\right)}{W(\varepsilon)}\right|_{x=x_0} = \frac{\mathcal{U}(x_0,\varepsilon)\mathrm{e}^{-(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))x_0}}{W(\varepsilon)}, \tag{5.48}$$

где функция $\mathcal{U}$ определена согласно (5.39). Из уравнения (5.40) следует, что

$$\mathcal{U}(x,\varepsilon) = \mathrm{e}^{(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))x}\left(\mathcal{U}(x_0,\varepsilon) - \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))t}\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f_{\varepsilon,m}(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Функция $\mathcal{U}$ ε-периодична для $x \geqslant x_0$, а потому выполнено равенство $\mathcal{U}(x_0+\varepsilon,\varepsilon) = \mathcal{U}(x_0,\varepsilon)$, которое можно переписать в виде

$$\mathcal{U}(x_0,\varepsilon) = \mathrm{e}^{\varepsilon(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))}\left(\mathcal{U}(x_0,\varepsilon) - \int\limits_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \mathrm{e}^{-(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))t}\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f_{\varepsilon,m}(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Отсюда и из (5.48) выводим

$$C_+^- = -\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \mathrm{e}^{-(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))t}\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) f_{\varepsilon,m}(t)\,\mathrm{d}t}{\left(1 - \mathrm{e}^{\varepsilon(\tau_{\varepsilon,m}+\tau_m(\varepsilon))}\right)W(\varepsilon)}.$$

Из (3.17) следует, что функция $\Theta^+_{\mathrm{per}}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ ограничена равномерно по x и ε. Учитывая данный факт, (5.35), (5.37) и (5.44), приходим к оценке

$$C_+^- = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}). \tag{5.49}$$

Из вида функции R_+, (3.13), (3.14), (3.17), (5.35), (5.44) следует, что

$$\|R_+\|_{C(\overline{Q})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-4}) \tag{5.50}$$

для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Как легко проверить,

$$\frac{d}{dx}R_+(x,\varepsilon) = \frac{1}{W(\varepsilon)}\left(\frac{d}{dx}\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\int\limits_{x_0}^{x}\Theta^-\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)h(t,\tau_{\varepsilon,m})f_{\varepsilon,m}(t)\,\mathrm{d}t\right.$$
$$\left.-\frac{d}{dx}\Theta^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\int\limits_{x_0}^{x}\Theta^+\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)h(t,\tau_{\varepsilon,m})f_{\varepsilon,m}(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

На основе данного равенства и (3.13), (3.14), (3.17), (5.35), (5.44) доказывается оценка

$$\left\|\frac{d}{dx}R_{\varepsilon,+}\right\|_{C(\overline{Q})} = \mathcal{O}(\varepsilon^m),$$

верная для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Из полученной оценки, уравнения для R_+, (5.35), (5.50) выводим, что

$$\|R_+\|_{C^2(\overline{Q})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-4}) \tag{5.51}$$

для любого $Q \in \mathfrak{C}$.

Аналогично (5.47) доказывается, что

$$\psi_{\varepsilon,m}(x) - R_-(x,\varepsilon) = C_-^+\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + C_-^-\Theta^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \leqslant -x_0.$$

Константа C_-^+ оценивается аналогично тому, как была получена оценка константы C_+^-. Единственным отличием является лишь то, что функцию $\mathcal{U}$ необходимо выбирать следующим образом:

$$\mathcal{U}(x,\varepsilon) := W_x\left(\psi_{\varepsilon,m}^{per}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \Theta_{\mathrm{per}}^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + (\tau_m(\varepsilon) - \tau_{\varepsilon,m})\,\Theta_{\mathrm{per}}^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi_{\varepsilon,m}^{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Аналогично (5.49), (5.51) несложно показать, что справедливы оценки

$$C_-^+ = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}), \quad \|R_-\|_{C^2(\overline{Q})} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-4})$$

для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Используя полученные оценки для C_-^+, C_+^-, $R_\pm$ и (3.14), (3.17), нетрудно проверить, что функция

$$R_{\varepsilon,m}(x) := (1-\chi(x))\,\widetilde{R}_{\varepsilon,m}(x) + C_+^-\Theta^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + C_-^+\Theta^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где

$$\widetilde{R}_{\varepsilon,m}(x) := \begin{cases} R_{\varepsilon,+}(x) & \text{при } x > 0, \\ R_{\varepsilon,-}(x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

удовлетворяет утверждению леммы. □

В силу доказанной леммы функция $\widehat{\psi}_{\varepsilon,m}$ является решением задачи (3.18), (3.19). Следовательно, к функции

$$F_{\varepsilon,m}(x) := \widehat{f}_{\varepsilon,m}(x)/\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)$$

применимо утверждение леммы 3.11, а именно, справедливо представление

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon,m} = \frac{T_8(\varepsilon,k_{\varepsilon,m})F_{\varepsilon,m}}{k_{\varepsilon,m}-k_\varepsilon}\psi_\varepsilon^{(0)} + \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)T_9(\varepsilon,k_{\varepsilon,m})F_{\varepsilon,m}, \tag{5.52}$$

где $\psi_\varepsilon^{(0)}$ — из леммы 3.10. Из (3.34) вытекает равномерная по ε оценка

$$\|\psi_\varepsilon^{(0)}\|_{W_2^1(-x_0,x_0)} \leqslant C. \tag{5.53}$$

Учитывая данную оценку, (5.43), лемму 3.4 и равномерную по ε ограниченность функционала $T_8(\varepsilon, k_{\varepsilon,m})$ и оператора $T_9(\varepsilon, k_{\varepsilon,m})$ (см. лемму 3.11), из (5.52) выводим

$$\|\widehat{\psi}_{\varepsilon,m} - \varphi T_9(\varepsilon, k_{\varepsilon,m})F_{\varepsilon,m}\|_{L_2(-x_0,x_0)} \leqslant \frac{C\varepsilon^{m-8}}{|k_{\varepsilon,m} - k_\varepsilon|},$$

откуда в силу сходимости $\widehat{\psi}_{\varepsilon,m}$ к ψ_0 в $L_2(-x_0, x_0)$ (см. леммы 5.3, 5.5) следует

$$k_\varepsilon - k_{\varepsilon,m} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}). \tag{5.54}$$

Полагая $m = 13$, в силу (5.36) получаем, что решение уравнения (3.32) удовлетворяет равенству

$$k_\varepsilon = \varepsilon^4\tau_4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5),$$

и потому $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$. В силу леммы 3.10 отсюда следует, что оператор H_ε имеет единственное собственное значение, сходящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, которое дается равенством $\lambda_\varepsilon^{(0)} = \mu_0^+(\varepsilon^2) - k_\varepsilon^2$ и является простым. Из (5.54) и определения $k_{\varepsilon,m}$ также вытекает, что асимптотика данного собственного значения имеет вид (1.10), (1.11). Теорема 1.3 полностью доказана.

В заключение выясним асимптотику собственной функции, соответствующей $\lambda_\varepsilon^{(0)}$. Умножая представление (5.52) на $\psi_\varepsilon^{(0)}$ скалярно в $L_2(-x_0, x_0)$, на основе лемм 3.11 и 5.3 и сходимости (3.34) аналогично доказательству равенства (4.23) несложно вывести существование функции $c(\varepsilon)$ такой, что

$$c(\varepsilon) = \frac{T_8(\varepsilon, k_{\varepsilon,m})F_{\varepsilon,m}}{k_{\varepsilon,m} - k_\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}), \quad c(\varepsilon) = 1 + O(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Учитывая данную формулу, из оценок (5.43), (5.53) и представления (5.52) получаем

$$\|\widehat{\psi}_{\varepsilon,m} - c(\varepsilon)\psi_\varepsilon^{(0)}\|_{W_2^2(-x_0,x_0)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8}).$$

Так как функции $\widehat{\psi}_{\varepsilon,m}$ и ψ_ε удовлетворяют равенствам (3.19) с $k = k_{\varepsilon,m}$ и $k = k_\varepsilon$, соответственно, из последнего равенства, (5.43), (5.54) и лемм 3.5, 5.4 получаем

$$\|\psi_{\varepsilon,m} - c(\varepsilon)\psi_\varepsilon^{(0)}\|_{W_2^2(Q)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-8})$$

для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Таким образом, доказана

Теорема 5.1. *Собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_\varepsilon^{(0)}$ оператора H_ε, можно выбрать так, что она будет удовлетворять асимптотическому разложению* (5.1) *в норме $W_2^2(Q)$ для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Коэффициенты данного разложения определяются согласно* (5.9), (5.29), (5.30), (5.31) *и лемме* 5.2. *При $\pm x \geqslant x_0$ для данной собственной функции справедливы равенства* (3.19), *причем для мультипликаторов $\varkappa_\pm = \varkappa^{\pm 1}(\varepsilon, k_\varepsilon)$, соответствующих функциям $\Theta^\pm$, выполнено равенство*

$$\varkappa(\varepsilon, k_\varepsilon) = \mathrm{e}^{-\tau_\varepsilon},$$

где τ_ε имеет асимптотику (5.3) *с коэффициентами, определенными* (5.33) *и леммой* 5.2.

§ 6. Существование собственных значений в конечной лакуне

Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы 1.4 и утверждения (2) теоремы 1.5. Всюду в параграфе считаем выполненным условие теоремы 1.4.

Лемма 6.1. *Решения* $\varphi_{\pm,i} = \varphi_{\pm,i}(\xi, \varepsilon^2)$ *уравнения* (2.2) *с* $M = \varepsilon^2 \mu_n^{\pm}(\varepsilon^2)$, *удовлетворяющие начальным условиям*

$$\varphi_{\pm,1}(0, \varepsilon^2) = 1, \quad \varphi'_{\pm,1}(0, \varepsilon^2) = 0, \quad \varphi_{\pm,2}(0, \varepsilon^2) = 0, \quad \varphi'_{\pm,2}(0, \varepsilon^2) = 1,$$

для достаточно малых ε *имеют вид*

$$\varphi_{\pm,1} = \cos \pi n\, \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{2j} P_{\pm}^{j}(\varepsilon^2)[\cos \pi n \xi],$$

$$\varphi_{\pm,2} = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n\, \xi + \frac{1}{\pi n} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{2j} P_{\pm}^{j}(\varepsilon^2)[\sin \pi n \xi],$$

где оператор $P_{\pm}(\varepsilon^2)$ *определяется равенством*

$$P_{\pm}(\varepsilon^2)[f](\xi, \varepsilon^2) := \frac{1}{\pi n} \int\limits_0^{\xi} (a(\eta) - \mu_n^{\pm}(\varepsilon^2) + \pi^2 n^2 \varepsilon^{-2}) \sin \pi n(\xi - \eta) f(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$

и является линейным ограниченным операторам из $C[0,1]$ *в* $C^2[0,1]$, *голоморфным по* ε^2. *Функции* $\varphi_{\pm,i}$ *голоморфны по* ε^2 *в норме* $C^2[0,1]$.

Лемма 6.2. *Решения* $\Theta_{\pm,i} = \Theta_{\pm,i}(\xi, \varepsilon^2, k^2)$ *уравнения* (2.2) *с* $M = \varepsilon^2(\mu_n^{\pm}(\varepsilon^2) \mp k^2)$, *где* k *— комплексный параметр, удовлетворяющие начальным условиям*

$$\Theta_{\pm,1}(0, \varepsilon^2, k^2) = 1, \quad \Theta'_{\pm,1}(0, \varepsilon^2, k^2) = 0,$$

$$\Theta_{\pm,2}(0, \varepsilon^2, k^2) = 0, \quad \Theta'_{\pm,2}(0, \varepsilon^2, k^2) = 1,$$

для достаточно малых ε *имеют вид*

$$\Theta_{\pm,i} = \varphi_{\pm,i} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{2j} k^{2j} \widetilde{P}_{\pm}^{j}(\varepsilon^2)[\varphi_i],$$

где оператор $\widetilde{P}_{\pm}(\varepsilon^2)$ *определяется равенством*

$$\widetilde{P}_{\pm}(\varepsilon^2)[f](\xi, \varepsilon^2) := \pm \int\limits_0^{\xi} \big(\varphi_{\pm,2}(\xi, \varepsilon^2)\varphi_{\pm,1}(\eta, \varepsilon^2) - \varphi_{\pm,2}(\eta, \varepsilon^2)\varphi_{\pm,1}(\xi, \varepsilon^2)\big)\, f(\eta)\, \mathrm{d}\eta$$

и является линейным ограниченным операторам из $C[0,1]$ *в* $C^2[0,1]$, *голоморфным по* ε^2. *Функции* $\Theta_{\pm,i}$ *голоморфны по* ε^2 *и* k^2 *в норме* $C^2[0,1]$.

Доказательство данных лемм аналогично доказательству лемм 3.4 и 3.5.

Всюду в настоящем параграфе в обозначениях функций $\varphi_{\pm,i}$ и $\Theta_{\pm,i}$ мы не указываем явно зависимость этих функций от ε и k, полагая для краткости

$$\varphi_{\pm,i}(\xi) := \varphi_{\pm,i}(\xi, \varepsilon^2), \quad \Theta_{\pm,i}(\xi) := \varphi_{\pm,i}(\xi, \varepsilon, k), \qquad i = 1, 2.$$

Непосредственно из лемм 6.1 и 6.2 вытекают равенства

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\pm,1}(1) = (-1)^n\left(1-\varepsilon^2\frac{b_n}{2\pi n}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^4),\\
&\varphi'_{\pm,1}(1) = (-1)^n\varepsilon^2\frac{a_n\mp\mu_{n,0}}{2}+\mathcal{O}(\varepsilon^4),\\
&\varphi_{\pm,2}(1) = (-1)^n\varepsilon^2\frac{a_n\pm\mu_{n,0}}{2\pi^2n^2}+\mathcal{O}(\varepsilon^4),\\
&\varphi'_{\pm,2}(1) = (-1)^n\left(1+\varepsilon^2\frac{b_n}{2\pi n}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^4),
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{\pm,1}(1) = (-1)^n\left(1-\varepsilon^2\frac{b_n}{2\pi n}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^4k^2),\\
&\Theta'_{\pm,1}(1) = (-1)^n\varepsilon^2\frac{a_n\mp\mu_{n,0}\pm k^2}{2}+\mathcal{O}(\varepsilon^4k^2),\\
&\Theta_{\pm,2}(1) = (-1)^n\varepsilon^2\frac{a_n\pm\mu_{n,0}\mp k^2}{2\pi^2n^2}+\mathcal{O}(\varepsilon^4k^2),\\
&\Theta'_{\pm,2}(1) = (-1)^n\left(1+\varepsilon^2\frac{b_n}{2\pi n}\right)+\mathcal{O}(\varepsilon^4k^2),
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

где $\mu_{n,0}:=\sqrt{a_n^2+b_n^2}>0$.

Лемма 6.3. *Пусть $c>0$ — произвольная константа, не зависящая от ε и k. Функции $\Theta_{\pm,i}$ голоморфны по k в норме $C^2[-c\varepsilon^{-1},c\varepsilon^{-1}]$. В этой же норме функции $\Theta_{\pm,i}$ и все их производные по k ограничены равномерно по ε и k.*

Доказательство. Из леммы 6.2 и равенств (6.1) вытекает, что

$$
\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[0,1]}\leqslant C_0,
$$

$$
|\varphi_{\pm,1}(1)|+|\varphi_{\pm,2}(1)|+|\varphi'_{\pm,1}(1)|+|\varphi'_{\pm,2}(1)|\leqslant 1+c\varepsilon^2,
$$

где константы C_0 и c не зависят от ε. Пусть для некоторого целого m выполнена равномерная по ε оценка

$$
\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[m-1,m]}\leqslant C_m,\quad i=1,2,
$$

где C_m — некоторая константа. Тогда из равенства

$$
\varphi_{\pm,i}(\xi+1)=\varphi_{\pm,i}(1)\varphi_{\pm,1}(\xi)+\varphi'_{\pm,i}(1)\varphi_{\pm,2}(\xi)
\tag{6.3}
$$

выводим

$$
\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[m,m+1]}\leqslant\big(|\varphi_{\pm,i}(1)|+|\varphi'_{\pm,i}(1)|\big)\,\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[m-1,m]}\leqslant C_m(1+c\varepsilon^2),
$$

и такая же оценка верна для $\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[m-2,m-1]}$. Применяя полученные оценки по индукции, приходим к неравенству

$$
\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[m,m+1]}\leqslant C_0(1+c\varepsilon^2)^m,\quad m\in\mathbb{Z},
$$

откуда следует, что

$$
\|\varphi_{\pm,i}\|_{C^2[-c\varepsilon^{-1},c\varepsilon^{-1}]}\leqslant C_0(1+c\varepsilon^2)^{c\varepsilon^{-1}+1}\leqslant C,
$$

где константа C не зависит от ε. Следовательно, оператор $\widetilde{P}_\pm(\varepsilon^2)$ из утверждения леммы 6.2 для любого фиксированного $c>0$ удовлетворяет равномерной по ε оценке

$$
\|\widetilde{P}_\pm(\varepsilon^2)[f]\|_{C^2[-c\varepsilon^{-1},c\varepsilon^{-1}]}\leqslant C\varepsilon^{-1}\|f\|_{C[-c\varepsilon^{-1},c\varepsilon^{-1}]}.
$$

Отсюда уже в силу леммы 6.2 следует утверждение доказываемой леммы. $\square$

Вычислим мультипликаторы $\varkappa_\pm^+ = \varkappa_\pm^+(\varepsilon,k)$ и $\varkappa_\pm^- = \varkappa_\pm^-(\varepsilon,k)$, соответствующие уравнению (2.2) с $M=\varepsilon^2(\mu_n^\pm(\varepsilon^2)\mp k^2)$. В силу формул (8.13) из [**28**, гл. 2, § 2.8] данные мультипликаторы можно определить равенствами

$$\varkappa_\pm^+ = \varkappa_\pm, \quad \varkappa_\pm^- = \frac{1}{\varkappa_\pm}, \tag{6.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\varkappa_\pm = \frac{D_\pm + (-1)^n\sqrt{D_\pm^2-4}}{2},\\
&D_\pm = D_\pm(\varepsilon^2,k^2) := \Theta_{\pm,1}(1,\varepsilon^2,k^2) + \Theta'_{\pm,2}(1,\varepsilon^2,k^2).
\end{aligned}$$

Так как $\mu_n^\pm(\varepsilon^2)$ — края зон существенного спектра оператора H_ε, а соответствующие им решения $\zeta_n^\pm$ уравнения (2.2) удовлетворяют периодическим либо антипериодическим краевым условиям (2.3), (2.4), ввиду [**28**, гл. 2, § 2.8] выполнено равенство

$$\varphi_{\pm,1}(1) + \varphi'_{\pm,2}(1) = 2(-1)^n. \tag{6.5}$$

Используя данное равенство, соотношения (6.2) и леммы 6.1, 6.2, прямыми вычислениями можно проверить, что

$$\begin{aligned}
&D_\pm(\varepsilon^2,k^2) = (-1)^n\left(2+\frac{\varepsilon^4k^2}{4\pi^2n^2}\left(\widetilde{D}_\pm(\varepsilon^2)-k^2\right)\right) + \varepsilon^6k^4\widehat{D}_\pm(\varepsilon^2,k^2),\\
&\widetilde{D}_\pm(\varepsilon^2) := \frac{4\pi^2n^2}{\varepsilon^2}\left(\widetilde{P}_\pm[\varphi_{\pm,1}](\xi,\varepsilon^2) + \frac{d}{d\xi}\widetilde{P}_\pm[\varphi_{\pm,2}](\xi,\varepsilon^2)\right)\Big|_{\xi=1} = 2\mu_{n,0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

где $\widehat{D}_\pm$ и $\widetilde{D}_\pm$ — голоморфные функции. Подстановка полученного равенства в (6.4) приводит к следующему представлению для $\varkappa_\pm$:

$$\begin{aligned}
&\varkappa_\pm(\varepsilon,k) = (-1)^n\left(1+\frac{\varepsilon^2k}{2\pi n}\sqrt{\widetilde{D}_\pm(\varepsilon^2)-k^2}\right) + \varepsilon^4k^2\widetilde{\varkappa}_\pm(\varepsilon,k),\\
&\ln\varkappa_\pm(\varepsilon,k) = \ln\left((-1)^n\right) + \frac{\varepsilon^2k}{2\pi n}\sqrt{2\mu_{n,0}-k^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4k),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

где $\widetilde{\varkappa}_\pm(\varepsilon,k)$ — голоморфная функция двух переменных, а ветвь логарифма выбрана из условия $\ln 1 = 0$ и, следовательно, $\ln(-1)=\pi\mathrm{i}$. Здесь мы также предполагаем, что

$$|2\mu_{n,0}-k^2| \geqslant c > 0,$$

где константа c не зависит от ε и k.

Согласно теореме Флоке — Ляпунова уравнение (2.2) с $M=\varepsilon^2\left(\mu_n^\pm(\varepsilon^2)\mp k^2\right)$ имеет фундаментальную систему решений вида

$$\begin{aligned}
&\Theta_\pm^+ = \Theta_\pm^+(\xi,\varepsilon,k) = \mathrm{e}^{-\xi\ln\varkappa_\pm(\varepsilon,k)}\Theta_{\mathrm{per},\pm}^+(\xi,\varepsilon,k),\\
&\Theta_\pm^- = \Theta_\pm^-(\xi,\varepsilon,k) = \mathrm{e}^{\xi\ln\varkappa_\pm(\varepsilon,k)}\Theta_{\mathrm{per},\pm}^-(\xi,\varepsilon,k),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

где функции $\Theta_{\mathrm{per},\pm}^\pm(\xi,\varepsilon,k)$ 1-периодичны. Всюду до конца параграфа в обозначениях функций $\Theta_\pm^\pm$ мы не указываем зависимость от ε и k и пишем для краткости

$$\Theta_\pm^+(\xi) := \Theta_\pm^+(\xi,\varepsilon,k), \quad \Theta_\pm^-(\xi) := \Theta_\pm^-(\xi,\varepsilon,k).$$

Рассмотрим уравнение (3.18) с $\lambda=\mu_n^\pm(\varepsilon^2)\mp k^2$. Будем искать решение данного уравнения, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned}
&u(x,\varepsilon,k) = c_+(\varepsilon,k)\Theta_\pm^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x\geqslant x_0,\\
&u(x,\varepsilon,k) = c_-(\varepsilon,k)\Theta_\pm^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x\leqslant -x_0,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

где $c_\pm(\varepsilon,k)$ — некоторые константы. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi,s) := \Theta_{\pm,2}(1)\Theta_{\pm,1}(\xi) + \big(s-\Theta_{\pm,1}(1)\big)\Theta_{\pm,2}(\xi),\\
&\widetilde{\Theta}^2_{\pm}(\xi,s) := -\Theta'_{\pm,1}(1)\Theta_{\pm,2}(\xi) + \big(s-\Theta_{\pm,1}(1)\big)\Theta_{\pm,1}(\xi).
\end{aligned}\tag{6.10}$$

Пусть $s=\varkappa_\pm$ или $s=\varkappa_\pm^{-1}$. Используя равенства

$$\begin{aligned}
&\Theta_{\pm,i}(\xi+1) = \Theta_{\pm,i}(1)\Theta_{\pm,1}(\xi) + \Theta'_{\pm,i}(1)\Theta_{\pm,2}(\xi),\\
&W_\xi\left(\Theta_{\pm,1}(\xi),\Theta_{\pm,2}(\xi)\right)\equiv 1, \quad \varkappa_\pm+\varkappa_\pm^{-1} = \Theta_{\pm,1}(1)+\Theta'_{\pm,2}(1),
\end{aligned}\tag{6.11}$$

легко показать, что

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi+1,s) = s\widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi,s),\\
&\widetilde{\Theta}^2_{\pm}(\xi+1,s) = s^{-1}\widetilde{\Theta}^2_{\pm}(\xi,s),
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi,\varkappa_\pm) = c_1^\pm\Theta^-_\pm(\xi), \quad \widetilde{\Theta}^2_{\pm}(\xi,\varkappa_\pm^{-1}) = c_2^\pm\Theta^+_\pm(\xi),\\
&\widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi,\varkappa_\pm^{-1}) = c_3^\pm\Theta^+_\pm(\xi), \quad \widetilde{\Theta}^2_{\pm}(\xi,\varkappa_\pm) = c_4^\pm\Theta^-_\pm(\xi),
\end{aligned}\tag{6.12}$$

где $c_i^\pm$ — некоторые константы, зависящие только от ε и k.

На функциях $g\in L_2(-x_0,x_0)$, $\operatorname{supp} g\subseteq[-x_0,x_0]$, определим оператор

$$T_{11}^\pm(\varepsilon,k)g := \frac{1}{\varkappa_\pm(\varepsilon,k)-\varkappa_\pm^{-1}(\varepsilon,k)}T_{12}^\pm(\varepsilon,k)g,\tag{6.13}$$

где

$$\begin{aligned}
T_{12}^\pm g := &\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\widetilde{\Theta}^1_\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varkappa_\pm^{-1}\right)\Theta_{\pm,1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\widetilde{\Theta}^2_\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varkappa_\pm\right)\Theta_{\pm,2}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)g(t)\,\mathrm{d}t\\
&+\int\limits_{x}^{+\infty}\left(\widetilde{\Theta}^1_\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varkappa_\pm\right)\Theta_{\pm,1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\widetilde{\Theta}^2_\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varkappa_\pm^{-1}\right)\Theta_{\pm,2}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)g(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Лемма 6.4. *Для любого $Q\in\mathfrak{C}$ оператор $T_{11}^\pm$ является линейным ограниченным оператором из $L_2(-x_0,x_0)$ в $W_2^2(Q)$. Задача* (3.18), (6.9) *с $\lambda=\mu_n^\pm(\varepsilon^2)\mp k^2$ эквивалентна следующему операторному уравнению в $L_2(-x_0,x_0)$:*

$$g+\varepsilon VT_{11}^\pm(\varepsilon,k)g = f,\tag{6.14}$$

где

$$g := f-Vu, \quad u=\varepsilon T_{11}^\pm(\varepsilon,k)g.\tag{6.15}$$

Замечание 6.1. В утверждение леммы функции из $L_2(-x_0,x_0)$, к которым применяется оператор $T_{11}^\pm$, считаются продолженными нулем вне отрезка $[-x_0,x_0]$.

Доказательство. Ограниченность оператора $T_{11}^\pm : L_2(-x_0,x_0)\to W_2^2(Q)$, $Q\in\mathfrak{C}$, следует непосредственно из определения этого оператора. Пусть g — решение уравнения (6.14). Определим функцию u согласно (6.15). С учетом определения функций $\widetilde{\Theta}^i_\pm$ нетрудно проверить, что функция u является решением уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)-\mu_n^\pm(\varepsilon^2)\pm k^2\right)u=g, \quad x\in\mathbb{R}.\tag{6.16}$$

При $x\leqslant x_0$ функция u имеет вид

$$u(x)=\widetilde{\Theta}^1_{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon},\varkappa_{\pm}^{-1}\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\Theta_{\pm,1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)g(t)\,\mathrm{d}t+\widetilde{\Theta}^2_{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon},\varkappa_{\pm}\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\Theta_{\pm,2}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

откуда и из (6.12) следует, что функция u удовлетворяет первому из условий (6.9). Аналогично доказывается, что функция u удовлетворяет и второму из условий (6.9).

Если u — решение задачи (3.18), (6.9), то оно является решением уравнения (6.16) с правой частью, определенной согласно (6.15). Учитывая определение оператора $T_{11}^{\pm}$, выводим, что $u=\varepsilon T_{11}^{\pm}g$. Подставляя данное равенство в (6.16), приходим к уравнению (6.14). □

Лемма 6.5. *Для любого $\delta>0$ отрезок $[\mu_n^-(\varepsilon^2)+\delta,\mu_n^+(\varepsilon^2)-\delta]$ вещественной оси не содержит собственных значений оператора H_ε, если ε достаточно мало.*

Доказательство. Для $\lambda\in[\mu_n^-(\varepsilon^2)+\delta,\mu_n^+(\varepsilon^2)-\delta]$ положим

$$k:=\sqrt{\mu_n^+(\varepsilon^2)-\lambda}>0.$$

Тогда из (1.3), (1.5) вытекает, что для достаточно малых ε выполнена оценка $0<c\leqslant k^2\leqslant 2\mu_{n,0}-c$, где c — не зависящая от ε и k константа. Из данной оценки и (6.6), (6.7) вытекает, что знаменатель в (6.13) удовлетворяет неравенству

$$|\varkappa_{\pm}(\varepsilon,k)-\varkappa_{\pm}^{-1}(\varepsilon,k)|\geqslant C\varepsilon^2, \tag{6.17}$$

где константа $C>0$ не зависит от ε и k. Равенства (6.2), (6.6), (6.7) и лемма 6.3 позволяют оценить равномерно по ε и k норму оператора $T_{12}^{\pm}(\varepsilon,k):L_2(-x_0,x_0)\to L_2(-x_0,x_0)$ следующим образом: $\|T_{12}^{\pm}\|\leqslant C\varepsilon^2$. Отсюда и из (6.17) следует, что оператор $VT_{11}^{\pm}:L_2(-x_0,x_0)\to L_2(-x_0,x_0)$ ограничен равномерно по ε и k. Следовательно, для достаточно малых ε оператор $(\mathrm{I}+\varepsilon VT_{11}^{\pm}(\varepsilon,k))$ ограниченно обратим, а потому уравнение (6.14) с $f=0$ имеет только тривиальное решение. С учетом леммы 6.4 отсюда выводим, что задача (3.18), (6.9) с $f=0$, $\lambda\in[\mu_n^-(\varepsilon^2)+\delta,\mu_n^+(\varepsilon^2)-\delta]$ не имеет нетривиальных решений для достаточно малых ε, что доказывает лемму. □

Из доказанной леммы следует, что собственные значения оператора H_ε, лежащие в лакуне $(\mu_n^-(\varepsilon^2),\mu_n^+(\varepsilon^2))$, удовлетворяют равенству (1.13). Данные собственные значения ищем в виде

$$\lambda_{\varepsilon,\pm}^{(n)}:=\mu_n^{\pm}(\varepsilon^2)\mp k_{\varepsilon,\pm}^2,$$

где $k_{\varepsilon,\pm}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Существование собственных значений $\lambda_{\varepsilon,\pm}^{(n)}$ оператора H_ε мы исследуем по схеме, аналогичной использованной в § 3 при изучении существовании собственного значения, стремящегося к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Используя леммы 6.2, 6.3, равенства (6.2), (6.7) и

$$\varkappa_{\pm}-\varkappa_{\pm}^{-1}=(\varkappa_{\pm}-(-1)^n)\left(1+(-1)^n\varkappa_{\pm}^{-1}\right),$$

из (6.13) и определения функций $\widetilde{\Theta}^i_{\pm}$ выводим, что оператор $T_{11}^{\pm}$ представим в виде

$$T_{11}^{\pm}(\varepsilon,k)=\frac{1}{\varkappa_{\pm}-\varkappa_{\pm}^{-1}}T_{13}^{\pm}(\varepsilon)+T_{14}^{\pm}(\varepsilon)+kT_{15}^{\pm}(\varepsilon,k), \tag{6.18}$$

где

$$\begin{aligned}T_{13}^{\pm}(\varepsilon)g=&\left(\varphi_{\pm,2}(1)\varphi_{\pm,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\big((-1)^n-\varphi_{\pm,1}(1)\big)\varphi_{\pm,2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_{\pm,1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)g(t)\,\mathrm{d}t\\&+\left(-\varphi_{\pm,1}'(1)\varphi_{\pm,2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\big((-1)^n-\varphi_{\pm,1}(1)\big)\varphi_{\pm,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_{\pm,2}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)g(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$T_{14}^{\pm}(\varepsilon)g=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\varphi_{\pm,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi_{\pm,2}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\varphi_{\pm,2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi_{\pm,1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\mathrm{sgn}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.20}$$

и для любого $Q \in \mathfrak{C}$ линейный оператор $T_{15}^{\pm}(\varepsilon,k) : L_2(-x_0,x_0) \to W_2^2(Q)$ голоморфен по k и ограничен равномерно по ε и k вместе со своей производной $\dfrac{d}{dk}T_{15}^{\pm}(\varepsilon,k)$.

Так как
$$\varphi_{\pm,i}(\xi,\varepsilon^2)=\Theta_{\pm,i}(\xi,\varepsilon^2,0),$$
из леммы 6.3 следует, что линейные операторы $T_{13}^{\pm}(\varepsilon), T_{14}(\varepsilon) : L_2(-x_0,x_0) \to W_2^2(Q)$ ограничены равномерно по ε для любого $Q \in \mathfrak{C}$.

Положим
$$\varphi_{\pm}(\xi,\varepsilon^2):=\varphi_{\pm,1}(\xi,\varepsilon^2)+\frac{(-1)^n-\varphi_{\pm,1}(1,\varepsilon^2)}{\varphi_{\pm,2}(1,\varepsilon^2)}\varphi_{\pm,2}(\xi,\varepsilon^2),$$
если $b_n \neq 0$ или $b_n=0$, $\operatorname{sgn} a_n=\pm 1$, и
$$\varphi_{\pm}(\xi,\varepsilon^2):=\varphi_{\pm,2}(\xi,\varepsilon^2)-\frac{(-1)^n-\varphi_{\pm,1}(1,\varepsilon^2)}{\varphi_{\pm,1}'(1,\varepsilon^2)}\varphi_{\pm,1}(\xi,\varepsilon^2),$$
если $b_n=0$, $\operatorname{sgn} a_n=\mp 1$. Функция $\varphi_{\pm}$ определена корректно, так как знаменатели $\varphi_{\pm,2}(1)$ и $\varphi_{\pm,1}'(1)$ в ее определении не равны нулю в силу (6.1). Из равенств (6.3) следует, что функция $\varphi_{\pm}$ 1-периодична по ξ для четных n и 1-антипериодична для нечетных n. Учитывая (6.1) и лемму 6.1 также нетрудно убедиться, что функция $\varphi_{\pm}$ голоморфна по ε^2 в норме $C^2[0,1]$. Всюду до конца параграфа для краткости обозначим $\varphi_{\pm}(\xi):=\varphi_{\pm}(\xi,\varepsilon^2)$.

Функция $\varphi_{\pm}$ является решением краевой задачи (2.2), (2.3) для четных n и краевой задачи (2.2), (2.4) для нечетных n с $M=\varepsilon^2\mu_n^{\pm}(\varepsilon^2)$. Следовательно, $\varphi_{\pm}=C_{\pm}(\varepsilon^2)\zeta_n^{\pm}$, где $C_{\pm}$ — некоторая константа, а $\zeta_n^{\pm}$ определена согласно (2.11), (2.13) и лемме 2.8. В силу формул (6.1) и леммы 6.1 верно равенство
$$\varphi_{\pm}(\xi,0)=\begin{cases}\cos\pi n\,\xi+\dfrac{b_n\sin\pi n\,\xi}{a_n\pm\mu_{n,0}}, & \text{если } b_n\neq 0 \text{ или } b_n=0,\ \operatorname{sgn} a_n=\pm 1,\\[2mm] \dfrac{\sin\pi n\,\xi}{\pi n}-\dfrac{b_n\cos\pi n\,\xi}{\pi n(a_n\mp\mu_{n,0})}, & \text{если } b_n=0,\ \operatorname{sgn} a_n=\mp 1.\end{cases}$$
С учетом голоморфности по ε^2 функций $\varphi_{\pm}$ из последнего равенства выводим, что $C_{\pm}$ голоморфна по ε^2 и $C_{\pm}(\varepsilon^2)=C_{\pm}(0)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, где $C_{\pm}(0)$ — некоторая вещественная константа, не равная нулю.

Из соотношений (6.5) и
$$W_\xi\left(\varphi_{\pm,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\varphi_{\pm,2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\equiv 1$$
легко получить равенство
$$\left((-1)^n-\varphi_{\pm,1}\right)^2=-\varphi_{\pm,1}'(1)\varphi_{\pm,2}(1),$$
учитывая которое, прямыми вычислениями проверяем, что
$$\begin{aligned} &T_{13}^{\pm}(\varepsilon)g=\varepsilon^2 c_{\pm}(\varepsilon^2)\zeta_n^{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)T_{16}^{\pm}(\varepsilon)g,\\ &T_{16}^{\pm}(\varepsilon)g:=\int\limits_{\mathbb{R}}\zeta_n^{\pm}\left(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)g(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{6.21}$$
где
$$c_{\pm}(\varepsilon^2)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_{\pm,2}(1,\varepsilon^2)C_{\pm}^2(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, & \text{если } b_n\neq 0 \text{ или } b_n=0,\ \operatorname{sgn} a_n=\pm 1,\\[2mm] -\dfrac{\varphi_{\pm,1}'(1,\varepsilon^2)C_{\pm}^2(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}, & \text{если } b_n=0,\ \operatorname{sgn} a_n=\mp 1.\end{cases}$$
Функционал $T_{16}^{\pm}(\varepsilon) : L_2(-x_0,x_0)\to\mathbb{C}$ ограничен равномерно по ε, так как функция $\zeta_n^{\pm}(\xi,\varepsilon^2)$ 1-периодична и голоморфна по ε^2 в норме $C^2[0,1]$. Равенства (6.18), (6.21) позволяют переписать уравнение (6.14) в виде

$$g + \frac{\varepsilon^3 c_\pm V \zeta_n^\pm}{\varkappa_\pm - \varkappa_\pm^{-1}} T_{16}^\pm g + \varepsilon V T_{14}^\pm g + \varepsilon k V T_{15}^\pm g = f. \tag{6.22}$$

Так как операторы $T_{14}^\pm, T_{15}^\pm : L_2(-x_0, x_0) \to L_2(-x_0, x_0)$ ограничены равномерно по ε и k, существует ограниченный обратный оператор

$$T_{17}^\pm(\varepsilon, k) := \big(\mathrm{I} + \varepsilon V T_{14}(\varepsilon) + \varepsilon k V T_{15}^\pm(\varepsilon, k)\big)^{-1} : L_2(-x_0, x_0) \to L_2(-x_0, x_0).$$

Оператор $T_{17}^\pm$ голоморфен по k и удовлетворяет равномерному по k равенству

$$T_{17}^\pm(\varepsilon, k) = \mathrm{I} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.23}$$

Применяя оператор $T_{17}^\pm$ к уравнению (6.22), получаем

$$g + \frac{\varepsilon^3 c_\pm T_{16}^\pm g}{\varkappa_\pm - \varkappa_\pm^{-1}} T_{17}^\pm V \zeta_n^\pm = T_{17}^\pm f. \tag{6.24}$$

Действуя функционалом $T_{16}^\pm$ на это уравнение, выводим

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^3 c_\pm}{\varkappa_\pm - \varkappa_\pm^{-1}} T_{16}^\pm T_{17}^\pm V \zeta_n^\pm\right) T_{16}^\pm g = T_{16}^\pm T_{17}^\pm f. \tag{6.25}$$

Аналогично тому, как из (3.30), (3.31) было выведено уравнение (3.32), из (6.24), (6.25) выводим, что значения k, при которых уравнение (6.14) с $f = 0$ имеет нетривиальные решения, определяются уравнением

$$k = \varepsilon \mathfrak{g}_\pm(\varepsilon, k), \tag{6.26}$$

где

$$\mathfrak{g}_\pm(\varepsilon, k) := -\frac{k\varepsilon^2 c_\pm(\varepsilon^2) T_{16}^\pm(\varepsilon) T_{17}^\pm(\varepsilon, k) V(x) \zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon^2\right)}{\varkappa_\pm(\varepsilon, k) - \varkappa_\pm^{-1}(\varepsilon, k)}.$$

Из леммы 6.1, равенств (6.1) и голоморфности $C_\pm(\varepsilon^2)$ следует, что $c_\pm(\varepsilon^2)$ — голоморфная функция, причем

$$c_\pm(0) = \begin{cases} (-1)^n C_\pm^2(0) \frac{a_n \pm \mu_{n,0}}{2\pi^2 n^2}, & \text{если } b_n \neq 0 \text{ или } b_n = 0, \operatorname{sgn} a_n = \pm 1, \\ (-1)^{n+1} C_\pm^2(0) \frac{a_n \mp \mu_{n,0}}{2}, & \text{если } b_n = 0, \operatorname{sgn} a_n = \mp 1. \end{cases}$$

Ясно, что $c_\pm(0) \neq 0$, причем

$$(-1)^{n+1} c_+(0) < 0.$$

Учитывая (6.7), заключаем, что функция $\mathfrak{g}_\pm$ голоморфна по k и ограничена равномерно по ε вместе со своей производной $\dfrac{d\mathfrak{g}_\pm}{dk}$. Для достаточно малых ε уравнение (6.26) имеет единственный корень $k = k_{\varepsilon,\pm}$, стремящийся к нулю при $\varepsilon \to 0$, что доказывается совершенно аналогично доказательству однозначной разрешимости уравнения (3.32). Нетривиальное решение уравнения (6.14) с $f = 0$ и $k = k_{\varepsilon,\pm}$ определено с точностью до умножения на числовой множитель и имеет вид

$$g_{\varepsilon,\pm} = -T_{17}(\varepsilon, k_{\varepsilon,\pm}) V \zeta_n^\pm. \tag{6.27}$$

Решение $\psi_{\varepsilon,\pm}$ задачи (3.18), (6.9), соответствующее $g_{\varepsilon,\pm}$, в силу (6.15) связано с $g_{\varepsilon,\pm}$ равенствами

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,\pm} &= \varepsilon T_{11}^\pm(\varepsilon, k_{\varepsilon,\pm}) g_{\varepsilon,\pm}, \\ g_{\varepsilon,\pm} &= -V \psi_{\varepsilon,\pm}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Если $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,\pm} > 0$, то функция $\psi_{\varepsilon,\pm}(x)$ экспоненциально убывает при $x \to \pm\infty$ (см. (6.7), (6.8), (6.9)). Следовательно, в этом случае $\psi_{\varepsilon,\pm}$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$ и потому является собственной функцией оператора H_ε, соответствующей собственному значению $\lambda_{\varepsilon,\pm} := \mu_n^\pm(\varepsilon^2) \mp k_{\varepsilon,\pm}^2$. Само собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\pm}$ является простым. Если же $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,\pm} \leqslant 0$, то функция $\psi_{\varepsilon,\pm}$ не является элементом $L_2(\mathbb{R})$, и в этом случае оператор H_ε не имеет собственного значения, удовлетворяющего равенству (1.13).

Из (6.23), (6.27) выводим, что в норме $L_2(-x_0,x_0)$ выполнено равенство

$$g_{\varepsilon,\pm}(x) = -V(x)\zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{6.29}$$

В силу (6.18), (6.21) и голоморфности функции ζ_n по ε^2 отсюда следует, что

$$\psi_{\varepsilon,\pm}(x) = -\frac{\varepsilon^3 c_\pm(\varepsilon^2)T_{16}^\pm(\varepsilon)g_{\varepsilon,\pm}}{\varkappa_\pm(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm}) - \varkappa_\pm^{-1}(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm})}\zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{6.30}$$

$$g_{\varepsilon,\pm}(x) = \frac{\varepsilon^3 c_\pm(\varepsilon^2)T_{16}^\pm(\varepsilon)g_{\varepsilon,\pm}}{\varkappa_\pm(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm}) - \varkappa_\pm^{-1}(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm})}V(x)\zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{6.31}$$

где равенство (6.30) выполнено в норме $W_2^2(Q)$ для любого $Q\in\mathfrak{C}$, а равенство (6.31) — в норме $L_2(-x_0,x_0)$. Так как в силу леммы Римана — Лебега

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} V^2(x)\cos\frac{2\pi n x}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x = o(1), \quad \varepsilon\to 0,$$

из (2.11), (2.13) получаем

$$\left\|V\zeta_n^\pm\right\|^2_{L_2(-x_0,x_0)} = \left\|V\zeta_{n,0}^\pm\right\|^2_{L_2(-x_0,x_0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \|V\|^2_{L_2(-x_0,x_0)} + o(1), \tag{6.32}$$

где

$$\zeta_n^\pm = \zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right), \quad \zeta_{n,0}^\pm = \zeta_{n,0}^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Умножим скалярно (6.29) и (6.31) на $V(x)\zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)$ в $L_2(-x_0,x_0)$. Получим

$$\left\|V(x)\zeta_n^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)\right\|_{L_2(-x_0,x_0)}\left(1+\frac{\varepsilon^3 c_\pm(\varepsilon^2)T_{16}^\pm(\varepsilon)g_{\varepsilon,\pm}}{\varkappa_\pm(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm}) - \varkappa_\pm^{-1}(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm})}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

откуда в силу (6.32)

$$-\frac{\varepsilon^3 c_\pm(\varepsilon^2)T_{16}^\pm(\varepsilon)g_{\varepsilon,\pm}}{\varkappa_\pm(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm}) - \varkappa_\pm^{-1}(\varepsilon,k_{\varepsilon,\pm})} = 1+\mathcal{O}(\varepsilon).$$

Из полученного равенства, (2.13) и (6.30) выводим, что

$$\psi_{\varepsilon,\pm}(x) = \zeta_{n,0}^\pm\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{6.33}$$

в норме $W_2^2(Q)$ для всех $Q\in\mathfrak{C}$.

Таким образом, доказана

Лемма 6.6. *Верно утверждение теоремы* 1.4. *Оператор H_ε имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\pm}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,\pm}>0$, которое дается в этом случае равенством*

$$\lambda_{\varepsilon,\pm} = \mu_n^\pm(\varepsilon^2) \mp k_{\varepsilon,\pm}^2,$$

а соответствующая собственная функция $\psi_{\varepsilon,\pm}$ определяется формулами (6.27), (6.28). *Для функции $\psi_{\varepsilon,\pm}$ верно равенство* (6.33).

Из вида функции $\mathfrak{g}_+(\varepsilon,k)$ и (6.7) следует равенство

$$\mathfrak{g}_+(\varepsilon,k)=(-1)^{n+1}\frac{c_+(\varepsilon^2)\pi n}{\sqrt{\widetilde{D}_+(\varepsilon^2)-k^2}}T_{16}^+(\varepsilon)(\mathrm{I}+\varepsilon VT_{14}^+(\varepsilon))^{-1}V(x)\zeta_n^+\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right)+\mathcal{O}(\varepsilon k).$$

Подставив это равенство в уравнение (6.26) с $k=k_{\varepsilon,+}$, получим

$$k_{\varepsilon,+}\big(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\big)=(-1)^{n+1}\frac{\varepsilon c_+(\varepsilon^2)\pi n}{\sqrt{\widetilde{D}_+(\varepsilon^2)-k_{\varepsilon,+}^2}}T_{16}^+(\varepsilon)(I+\varepsilon VT_{14}(\varepsilon))^{-1}V(x)\zeta_n^+\left(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon^2\right).$$

Отсюда ввиду (6.6), (6.21), голоморфности функции $c_+(\varepsilon^2)$ по ε^2, вещественности функции ζ_n^+ и неравенства $(-1)^{n+1}c_+(0)<0$ вытекает, что условие $\operatorname{Re}k_{\varepsilon,+}>0$ эквивалентно (1.14). Утверждение (2) теоремы 1.5 доказано.

В следующем параграфе нам понадобится вспомогательная лемма, которую удобно сформулировать в настоящем параграфе.

Лемма 6.7. *Для достаточно малых ε и k верно представление*

$$(\mathrm{I}+\varepsilon VT_{11}^\pm(\varepsilon,k))^{-1}f=\frac{\varepsilon T_{18}^\pm(\varepsilon,k)f}{k-k_{\varepsilon,\pm}}g_{\varepsilon,\pm}+T_{19}^\pm(\varepsilon,k)f,$$

где линейный функционал $T_{18}^\pm:L_2(-x_0,x_0)\to\mathbb{C}$ и оператор $T_{19}^\pm:L_2(-x_0,x_0)\to L_2(-x_0,x_0)$ ограничены равномерно по ε и k.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.11 и основано на уравнениях (6.24)–(6.26), равенстве (6.23) и формулах (2.13), (6.6), (6.7), (6.27).

§ 7. Асимптотики собственных значений в конечной лакуне

В настоящем параграфе мы докажем утверждение (1) теоремы 1.5, а также теоремы 1.6 и 1.7. Основу доказательств составят асимптотические разложения чисел

$$\lambda_{\varepsilon,\pm}^{(n)}:=\mu_n^\pm(\varepsilon^2)\mp k_{\varepsilon,\pm}^2,$$

где $k_{\varepsilon,\pm}$ — решения уравнений (6.26). Как и в § 5, мы начнем с формального построения асимптотических разложений данных чисел и соответствующих им нетривиальных решений $\psi_{\varepsilon,\pm}$ задачи (3.18), (6.9) из (6.28), а затем дадим строгое обоснование.

Асимптотику числа $\lambda_{\varepsilon,\pm}$ построим в виде соответствующего ряда (1.15) или (1.17), а асимптотику соответствующей ему функции $\psi_{\varepsilon,\pm}$ ищем в виде

$$\psi_{\varepsilon,\pm}(x)=h(x,\tau_\varepsilon^\pm)\Bigg(\zeta_{n,0}^\pm(\xi)+\sum_{i=1}^\infty\varepsilon^i\psi_i^\pm(x,\xi)\Bigg),\tag{7.1}$$

где функция h определена равенством (5.2). Асимптотику функции $\tau_\varepsilon^\pm$ построим следующим образом:

$$\tau_\varepsilon^\pm=\sum_{i=2}^\infty\varepsilon^i\tau_i^\pm.\tag{7.2}$$

Целью формального построения является определение вида функций $\psi_i^\pm$ и чисел $\lambda_i^\pm := \lambda_{i,\pm}^{(n)}$ и $\tau_i^\pm$. Функции $\psi_i^\pm$ будем искать 1-периодическими по ξ, если n четно, и 1-антипериодическими, если n нечетно. Потребуем также, чтобы функции $\psi_i^\pm$ принадлежали пространству $\mathcal{V}$ как функции переменной x. Как и в § 5, анзац (7.1) выбран так, чтобы он имел ту же структуру при $|x| \geqslant x_0$, что и функции $\Theta_\pm^\pm$ из (6.8). В частности, требование 1-периодичности (1-антипериодичности) функций $\psi_i^\pm$ объясняется 1-периодичностью (1-антипериодичностью) функций

$$\mathrm{e}^{-\xi \ln((-1)^n)} \Theta^+_{\mathrm{per},\pm}(\xi,\varepsilon,k),$$

$$\mathrm{e}^{\xi \ln((-1)^n)} \Theta^-_{\mathrm{per},\pm}(\xi,\varepsilon,k)$$

(см. (6.7), (6.8), (7.2)).

Перейдем к формальному построению асимптотик. Подставим (7.1), (7.2) и соответствующий из рядов (1.15), (1.17) в уравнение (3.18) с $f=0$, поделим полученное уравнение на $h(x,\tau_\varepsilon^\pm)$, разложим в асимптотический ряд по степеням ε и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате приходим к следующим уравнениям для функций $\psi_i^\pm$:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\pi^2 n^2\right)\psi_{i+2}^\pm = 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\psi_{i+1}^\pm + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a - V\right)\psi_i^\pm \\ + \sum_{j=0}^{i}\left(2h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial x} + h_j^{(2)} + \lambda_j^\pm\right)\psi_{i-j}^\pm + 2\sum_{j=2}^{i+1} h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\psi_{i-j+1}^\pm, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{7.3}$$

где $i \geqslant -1$, $a=a(\xi)$, $V=V(x)$, $\psi_{-1}^\pm := 0$, $\psi_0^\pm(x,\xi) := \zeta_{n,0}^\pm(\xi)$, $h_i^{(1)} = h_i^{(2)} := 0$, $i=0,1$. Функции $h_i^{(1)} = h_i^{(1)}(x,\boldsymbol{\tau}_i^\pm)$ и $h_i^{(2)} = h_i^{(2)}(x,\boldsymbol{\tau}_i^\pm)$, $\boldsymbol{\tau}_i^\pm := (\tau_2^\pm,\dots,\tau_i^\pm)$, $i \geqslant 2$, являются, соответственно, коэффициентами разложения функций $h'(x,\tau_\varepsilon^\pm)/h(x,\tau_\varepsilon^\pm)$ и $h''(x,\tau_\varepsilon^\pm)/h(x,\tau_\varepsilon^\pm)$ в асимптотический ряд по степеням ε и удовлетворяют равенствам (5.5) с $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i^\pm$ для $i \geqslant 2$, где $\widetilde{h}_i^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$, и, в частности,

$$\widetilde{h}_2^{(1)}(x) = \widetilde{h}_2^{(2)}(x) = 0. \tag{7.4}$$

При $\pm x \geqslant x_0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} h_i^{(1)}(x,\boldsymbol{\tau}_i) &= \mp\tau_i, \\ h_i^{(2)}(x,\boldsymbol{\tau}_i) &= \sum_{j=2}^{i-2}\tau_j\tau_{i-j}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

где $\tau_p = \tau_p^+$ или $\tau_p = \tau_p^-$. Данные равенства вытекают из (5.7) и (7.2).

В силу леммы 2.5 уравнения (7.3) разрешимы в классе 1-периодических по ξ функций для четных n и 1-антипериодических по ξ функций для нечетных n, если выполнены следующие условия разрешимости:

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dx}\int_0^1 \zeta_{n,0}^\pm\psi_{i+1}^\pm\,\mathrm{d}\xi = c_0^\pm\left(\frac{d^2}{dx^2} - V\right)\int_0^1 \zeta_{n,0}^\mp\psi_i^\pm\,\mathrm{d}\xi - 2\sum_{j=2}^{i+1} h_j^{(1)}\int_0^1 \zeta_{n,0}^\pm\psi_{i-j+1}^\pm\,\mathrm{d}\xi \\ + c_0^\pm\sum_{j=0}^{i}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx} + h_j^{(2)} + \lambda_j^\pm\right)\int_0^1 \zeta_{n,0}^\mp\psi_{i-j}^\pm\,\mathrm{d}\xi - c_0^\pm\int_0^1 a\zeta_{n,0}^\mp\psi_i^\pm\,\mathrm{d}\xi, \quad x\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$2\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 \zeta_{n,0}^{\mp}\psi_{i+1}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi = -c_0^{\pm}\left(\frac{d^2}{dx^2}-V\right)\int\limits_0^1 \zeta_{n,0}^{\pm}\psi_i^{\pm}\,\mathrm{d}\xi - 2\sum_{j=2}^{i+1} h_j^{(1)}\int\limits_0^1 \zeta_{n,0}^{\mp}\psi_{i-j+1}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi$$

$$- c_0^{\pm}\sum_{j=0}^{i}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx}+h_j^{(2)}+\lambda_j^{\pm}\right)\int\limits_0^1 \zeta_{n,0}^{\pm}\psi_{i-j}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi + c_0^{\pm}\int\limits_0^1 a\zeta_{n,0}^{\pm}\psi_i^{\pm}\,\mathrm{d}\xi, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{7.7}$$

где

$$c_0^{\pm} := \pm\frac{1}{\pi n}, \quad i \geqslant 0.$$

При выводе данных уравнений мы также воспользовались равенством

$$\frac{d}{d\xi}\zeta_{n,0}^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{c_0^{\pm}}\zeta_{n,0}^{\mp}(\xi) \tag{7.8}$$

и провели однократное интегрирование по частям в некоторых интегралах, предполагая, что функции ψ_j 1-периодичны (1-антипериодичны) по ξ.

Для исследования разрешимости уравнений (7.6), (7.7), нам понадобится следующее очевидное утверждение.

Лемма 7.1. *Пусть* $f\in C(\mathbb{R})$. *Уравнение*

$$2\frac{du}{dx} = f, \quad x\in\mathbb{R},$$

имеет решение $u\in C^1(\mathbb{R})\cap\mathcal{V}$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{supp} f\subseteq[-x_0,x_0]$. *В этом случае существует единственное решение данного уравнения, удовлетворяющее равенству*

$$u(x_0)+u(-x_0)=0, \tag{7.9}$$

которое имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Из уравнения (7.3) для функции $\psi_1^{\pm}$ следует, что она имеет вид

$$\psi_1^{\pm}(x,\xi) = u_{1,0}^{\pm}(x)\zeta_{n,0}^{\pm}(\xi) + u_{1,1}^{\pm}(x)\zeta_{n,0}^{\mp}(\xi), \tag{7.10}$$

где $u_{1,j}^{\pm}(x)$ — некоторые функции. Данное представление для функции $\psi_1^{\pm}$ и равенства (2.20) с $N=1$ позволяют переписать уравнения (7.6), (7.7), с $i=0$ следующим образом:

$$2\frac{du_{1,0}^{\pm}}{dx} = 0, \tag{7.11}$$

$$2\frac{du_{1,1}^{\pm}}{dx} = f_{1,1}^{\pm}, \tag{7.12}$$

где $x\in\mathbb{R}$ и $f_{1,1}^{\pm} := c_0^{\pm}\left(V+\mu_{n,0}^{\pm}-\lambda_0^{\pm}\right)$.

Ясно, что $\psi_1^{\pm}(\cdot,\xi)\in\mathcal{V}$, если $u_{1,j}^{\pm}\in\mathcal{V}$, $j=0,1$. В силу леммы 7.1 уравнения (7.11), (7.12) разрешимы в классе $\mathcal{V}$, если $\lambda_0^{\pm}$ выбрано согласно (1.16), (1.18), причем решения этих уравнений имеют вид

$$u_{1,0}^{\pm}=0, \qquad u_{1,1}^{\pm} = \widetilde{u}_1^{\pm}(x)+c_1^{\pm}, \qquad \widetilde{u}_1^{\pm}(x) = c_0^{\pm}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-t)V(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.13}$$

где $c_1^{\pm}$ — некоторая константа, а функция $\widetilde{u}_1$ удовлетворяет равенству (7.9).

Замечание 7.1. Решение уравнения (7.11) определено с точностью до константы. Без ограничения общности мы полагаем эту константу равной нулю, так как этого всегда можно добиться, умножая асимптотику (7.1) на подходящий числовой множитель.

Так как уравнения (7.6), (7.7) выполнены для $i=0$, уравнение (7.3) с $i=0$ разрешимо в классе 1-периодических (1-антипериодических) функций. Используя (7.8), (7.10), (7.13) и формулы (1.16), (1.18) для $\lambda_0^{\pm}$, нетрудно проверить, что уравнение (7.3) с $i=0$ имеет вид

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\pi^2n^2\right)\psi_2^{\pm}=\left(-a+\mu_{n,0}^{\pm}\right)\zeta_{n,0}^{\pm},\quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^2.$$

Согласно лемме 2.5 решение данного уравнения дается формулой

$$\begin{aligned}&\psi_2^{\pm}(x,\xi)=\widetilde{\psi}_2^{\pm}(x,\xi)+u_{2,0}^{\pm}(x)\zeta_{n,0}^{\pm}(\xi)+u_{2,1}^{\pm}(x)\zeta_{n,0}^{\mp}(\xi),\\&\widetilde{\psi}_2^{\pm}(x,\xi)=L_n[-a\zeta_{n,0}^{\pm}+\mu_{n,0}^{\pm}\zeta_{n,0}^{\pm}](\xi)=\widetilde{\zeta}_{n,1}^{\pm}(\xi),\end{aligned}\tag{7.14}$$

где последнее равенство вытекает из (2.23) с $N=1$.

Подставим (7.10), (7.13), (7.14) в уравнения (7.6), (7.7) с $i=1$ и учтем соотношения (5.5), (7.4), (2.20) с $N=1$ и ортогональность функции $\widetilde{\zeta}_{n,1}^{\pm}$ функциям $\zeta_{n,0}^{+}$ и $\zeta_{n,0}^{-}$ в $L_2(0,1)$. Получим

$$\begin{aligned}&2\frac{du_{2,0}^{\pm}}{dx}=f_{2,0}^{\pm},\\&2\frac{du_{2,1}^{\pm}}{dx}=f_{2,1}^{\pm}=-c_0^{\pm}\lambda_1^{\pm},\quad x\in\mathbb{R},\\&f_{2,0}^{\pm}=c_0^{\pm}\left(\frac{d^2}{dx^2}-V\right)u_{1,1}^{\pm}+2c_0^{\pm}\mu_{n,0}^{\pm}u_{1,1}^{\pm}+2\tau_2^{\pm}\frac{d}{dx}\left(|x|(1-\chi(x))\right),\end{aligned}\tag{7.15}$$

Решения этих уравнений будем искать в классе $\mathcal{V}$, что объясняется равенствами (7.14) и требованием $\psi_2^{\pm}(\cdot,\xi)\in\mathcal{V}$.

Ясно, что $f_{2,j}^{\pm}\in\mathcal{V}$, $j=0,1$, поэтому вложение $\operatorname{supp}f_{2,1}^{\pm}\subseteq[-x_0,x_0]$ эквивалентно формулам (1.16), (1.18) для $\lambda_1^{\pm}$, а вложение $\operatorname{supp}f_{2,0}^{\pm}\subseteq[-x_0,x_0]$ — равенствам

$$\begin{aligned}&f_{2,0}^{\pm}(x_0)+f_{2,0}^{\pm}(-x_0)=0,\\&f_{2,0}^{\pm}(x_0)-f_{2,0}^{\pm}(-x_0)=0.\end{aligned}$$

Учитывая условие (7.9) для функции $\widetilde{u}_1^{\pm}$, нетрудно проверить, что последние два равенства выполнены, если положить

$$\begin{aligned}&c_1^{\pm}=0,\\&\tau_2^{\pm}=-c_0^{\pm}\mu_{n,0}^{\pm}\widetilde{u}_1^{\pm}(x_0)=\mp\frac{\mu_{n,0}}{\pi^2n^2}\int\limits_{\mathbb{R}}V(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{7.16}$$

где $\mu_{n,0}=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&u_{2,0}^{\pm}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-t)f_{2,0}^{\pm}(t)\,\mathrm{d}t,\\&u_{2,1}^{\pm}(x)=\widetilde{u}_2^{\pm}(x)+c_2^{\pm},\\&\widetilde{u}_2^{\pm}(x)\equiv 0,\end{aligned}\tag{7.17}$$

где $c_2^{\pm}$ — некоторая константа.

Лемма 7.2. *Существуют решения уравнений* (7.3), (7.6), (7.7)*, вида*

$$\psi_i^{\pm}(x,\xi)=\widetilde{\psi}_i^{\pm}(x,\xi)+u_{i,0}^{\pm}(x)\zeta_{n,0}^{\pm}(\xi)+u_{i,1}^{\pm}(x)\zeta_{n,0}^{\mp}(\xi),\tag{7.18}$$

где

$$\widetilde{\psi}_i^{\pm}(x,\xi) = L_n[G_i^{\pm}(x,\cdot)](\xi) = \sum_{j=2}^{\mathfrak{m}_i^{\pm}} u_{i,j}^{\pm}(x)\psi_{i,j}^{\pm}(\xi), \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned} u_{i,0}^{\pm}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-t) f_{i,0}^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x,\\ u_{i,1}^{\pm}(x) &= \widetilde{u}_i^{\pm}(x) + c_i^{\pm},\\ \widetilde{u}_i^{\pm}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x-t) f_{i,1}^{\pm}(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned} G_i^{\pm} =& 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\xi}\widetilde{\psi}_{i-1}^{\pm} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V - a\right)\widetilde{\psi}_{i-2}^{\pm} + \zeta_{n,0}^{\pm}\int\limits_0^1 a\zeta_{n,0}^{\pm}\widetilde{\psi}_{i-2}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi\\ &+ \zeta_{n,0}^{\mp}\int\limits_0^1 a\zeta_{n,0}^{\mp}\widetilde{\psi}_{i-2}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi + 2\sum_{j=2}^{i-3} h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{\psi}_{i-j-1}^{\pm} - \big(a-\mu_{n,0}^{\pm}\big)\zeta_{n,0}^{\pm}u_{i-2,0}^{\pm}\\ &+ \sum_{j=0}^{i-4}\left(2h_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial x} + h_j^{(2)} + \lambda_j^{\pm}\right)\widetilde{\psi}_{i-j-2}^{\pm} - \big(a+\mu_{n,0}^{\pm}\big)\zeta_{n,0}^{\mp}u_{i-2,1}^{\pm}, \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned} f_{i,0}^{\pm} =& c_0^{\pm}\left(\frac{d^2}{dx^2} - V\right)u_{i-1,1}^{\pm} - c_0^{\pm}\int\limits_0^1 a\zeta_{n,0}^{\mp}\widetilde{\psi}_{i-1}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi - 2\sum_{j=2}^{i} h_j^{(1)}u_{i-j,0}^{\pm}\\ &+ c_0^{\pm}\sum_{j=2}^{i-2}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx} + h_j^{(2)} + \lambda_j^{\pm}\right)u_{i-j-1,1}^{\pm} + 2c_0^{\pm}\mu_{n,0}^{\pm}u_{i-1,1}^{\pm},\\ f_{i,1}^{\pm} =& -c_0^{\pm}\left(\frac{d^2}{dx^2} - V\right)u_{i-1,0}^{\pm} + c_0^{\pm}\int\limits_0^1 a\zeta_{n,0}^{\pm}\widetilde{\psi}_{i-1}^{\pm}\,\mathrm{d}\xi - 2\sum_{j=2}^{i-1} h_j^{(1)}u_{i-j,1}^{\pm}\\ &- c_0^{\pm}\sum_{j=2}^{i-1}\left(2h_j^{(1)}\frac{d}{dx} + h_j^{(2)} + \lambda_j^{\pm}\right)u_{i-j-1,0}^{\pm}, \end{aligned} \tag{7.22}$$

$\mathfrak{m}_i^{\pm}$ *— некоторые числа,* $G_i^{\pm} = G_i^{\pm}(x,\xi)$, $f_{i,j}^{\pm} = f_{i,j}^{\pm}(x)$, $V = V(x)$, $a = a(\xi)$, $\zeta_{n,0}^{\pm} := \zeta_{n,0}^{\pm}(\xi)$, $\widetilde{\psi}_{-1}^{\pm} = \widetilde{\psi}_0^{\pm} := 0$, $u_{0,0}^{\pm}(x) \equiv 1$, $u_{-1,j}^{\pm} = u_{0,1}^{\pm} := 0$, $u_{i,j}^{\pm} \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$, $\operatorname{supp} f_{i,p}^{\pm}(x) \subseteq [-x_0, x_0]$, $p = 0,1$, *функции* $\psi_{i,j}^{\pm}$ *1-периодичны для четных* n *и 1-антипериодичны для нечетных* n *и удовлетворяют равенствам*

$$\int\limits_0^1 \zeta_{n,0}^{+}(\xi)\psi_{i,j}^{\pm}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_0^1 \zeta_{n,0}^{-}(\xi)\psi_{i,j}^{\pm}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{7.23}$$

Функции $u_{i,0}^{\pm}$ *и* $\widetilde{u}_i^{\pm}$ *удовлетворяют условию* (7.9). *Числа* $\lambda_i^{\pm}$, $\tau_i^{\pm}$ *и* $c_i^{\pm}$ *даются формулами*

$$\lambda_i^{\pm} = -\sum_{j=2}^{i-2}\tau_j^{\pm}\tau_{i-j}^{\pm} + \mathfrak{a}_{i,+}^{\pm} + \frac{2}{c_0^{\pm}}\sum_{j=2}^{i}\tau_j^{\pm}\widetilde{\mathfrak{u}}_{i-j+1}^{\pm}, \tag{7.24}$$

$$\tau_i^{\pm} = \frac{c_0^{\pm}}{2}\left(\widetilde{\mathfrak{a}}_{i-1,-}^{\pm} - 2\mu_{n,0}^{\pm}\widetilde{\mathfrak{u}}_{i-1}^{\pm} - \sum_{j=2}^{i-2}\mathfrak{l}_j^{\pm}\widetilde{\mathfrak{u}}_{i-j-1}^{\pm}\right) \tag{7.25}$$

$$c_i^{\pm}=\frac{1}{2\mu_{n,0}^{\pm}}\left(\widetilde{\mathfrak{a}}_{i,+}^{\pm}-\sum_{j=2}^{i-2}\mathfrak{l}_j^{\pm}c_{i-j}^{\pm}-\frac{2}{c_0^{\pm}}\sum_{j=2}^{i-1}\tau_j^{\pm}\mathfrak{u}_{i-j+1}^{\pm}\right), \tag{7.26}$$

где $\mathfrak{l}_i^{\pm}:=\lambda_i^{\pm}+\sum\limits_{j=2}^{i-2}\tau_j^{\pm}\tau_{i-j}^{\pm}$, *а числа* $\mathfrak{a}_{i,\pm}^{\pm}$, $\widetilde{\mathfrak{a}}_{i,\pm}^{\pm}$ $\mathfrak{u}_i^{\pm}$, $\widetilde{\mathfrak{u}}_i^{\pm}$ *определены в* (7.27).

Доказательство. Утверждение леммы о $\psi_1^{\pm}$, $\widetilde{\psi}_2^{\pm}$, $u_{i,j}^{\pm}$, $i=1,2$, $j=0,1$, $\lambda_0^{\pm}$, $\widetilde{u}_{2,1}^{\pm}$, $\lambda_1^{\pm}$, $c_1^{\pm}$ и $\tau_2^{\pm}$ следует из (7.10), (7.13), (7.14), (7.16), (7.17) и формул (1.16), (1.18) для $\lambda_0^{\pm}$ и $\lambda_1^{\pm}$.

Далее применим индукцию. Допустим, что формулы (7.18), (7.19), (7.23) верны для $i\leqslant m+1$, формулы (7.20), (7.25) — для $i\leqslant m$, формулы (7.24), (7.26) — для $i\leqslant m-1$. Докажем, что в это случае верно утверждение леммы о $\psi_{m+2}^{\pm}$, $\widetilde{\psi}_{m+2}^{\pm}$, $u_{m+1,0}^{\pm}$, $u_{m+1,1}^{\pm}$, $\widetilde{u}_{m+1}^{\pm}$, $\lambda_m^{\pm}$, $\tau_{m+1}^{\pm}$ и $c_m^{\pm}$.

Всюду в доказательстве леммы обозначаем через $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $L_2(0,1)$. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\psi}_{i,+}^{\pm}(\xi):=\frac{\widetilde{\psi}_i^{\pm}(x_0,\xi)+\widetilde{\psi}_i^{\pm}(-x_0,\xi)}{2},\\
&\widehat{\psi}_{i,-}^{\pm}(\xi):=\frac{\widetilde{\psi}_i^{\pm}(x_0,\xi)-\widetilde{\psi}_i^{\pm}(-x_0,\xi)}{2},\\
&\mathfrak{a}_{i,+}^{\pm}:=(\zeta_{n,0}^{\pm},a\widehat{\psi}_{i,+}^{\pm}),\quad \mathfrak{a}_{i,-}^{\pm}:=(\zeta_{n,0}^{\pm},a\widehat{\psi}_{i,-}^{\pm}),\\
&\widetilde{\mathfrak{a}}_{i,+}^{\pm}:=(\zeta_{n,0}^{\mp},a\widehat{\psi}_{i,+}^{\pm}),\quad \widetilde{\mathfrak{a}}_{i,-}^{\pm}:=(\zeta_{n,0}^{\mp},a\widehat{\psi}_{i,-}^{\pm}),\\
&\mathfrak{u}_i^{\pm}:=u_{i,0}(x_0),\quad \widetilde{\mathfrak{u}}_i^{\pm}:=u_{i,1}(x_0).
\end{aligned}\tag{7.27}$$

Из формул (1.16), (1.18) для $\lambda_0^{\pm}$, $\lambda_1^{\pm}$ и соотношений (7.10), (7.13), (7.14), (7.16), (7.17) вытекает

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{u}_1^{\pm}=\widetilde{\mathfrak{u}}_2^{\pm}=0,\\
&\widehat{\psi}_{j,+}^{\pm}=\widehat{\psi}_{j,-}^{\pm}=\widehat{\psi}_{2,-}^{\pm}=0,\quad j=0,1,\\
&\mathfrak{a}_{1,+}^{\pm}=\mathfrak{a}_{1,-}^{\pm}=\widetilde{\mathfrak{a}}_{1,+}^{\pm}=\widetilde{\mathfrak{a}}_{1,-}^{\pm}=0,\\
&\mathfrak{l}_0^{\pm}=\mu_{n,0}^{\pm},\quad \mathfrak{l}_1^{\pm}=0.
\end{aligned}\tag{7.28}$$

Согласно индукционному предположению функции $\psi_{i,j}^{\pm}$, $j\geqslant 2$, $i\leqslant m+1$, удовлетворяют равенствам (7.23). Учитывая эти равенства, (7.28) и (2.20) с $N=1$ и подставляя представления (7.18), (7.19) в уравнения (7.6), (7.7) с $i=m+1$, получаем

$$2\frac{d}{dx}u_{m+1,j}^{\pm}=f_{m+1,j}^{\pm},\quad x\in\mathbb{R},\quad j=0,1,\tag{7.29}$$

где функции $f_{m+1,j}^{\pm}\in C^{\infty}(\mathbb{R})\cap\mathcal{V}$ даются формулами (7.22). Решения этих уравнений будем искать в пространстве $\mathcal{V}$, чтобы обеспечить принадлежность $\psi_{m+1}^{\pm}(\cdot,\xi)\in\mathcal{V}$. Согласно лемме 7.1 условием разрешимости уравнений (7.29) в пространстве $\mathcal{V}$ является вложение $\operatorname{supp}f_{m+1,j}^{\pm}\subseteq[-x_0,x_0]$. Ясно, что данные вложения эквивалентны равенствам

$$\mathfrak{f}_{m+1,j,+}^{\pm}=\mathfrak{f}_{m+1,j,-}^{\pm}=0,$$

где

$$\mathfrak{f}_{m+1,j,+}^{\pm}:=\frac{f_{m+1,j}^{\pm}(x_0)+f_{m+1,j}^{\pm}(-x_0)}{2},$$

$$\mathfrak{f}_{m+1,j,-}^{\pm}:=\frac{f_{m+1,j}^{\pm}(x_0)-f_{m+1,j}^{\pm}(-x_0)}{2}.$$

Из формул (7.22) для $f_{m+1,j,\pm}^{\pm}$, (7.20) с $i\leqslant m$, условия (7.9) для функций $u_{i,0}^{\pm}$, $\widetilde{u}_i^{\pm}$, $i\leqslant m$, равенств (7.5), (7.16), (7.28) и определения чисел $\mathfrak{f}_{m+1,j,\pm}^{\pm}$, следует, что

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,0,+}=-c^{\pm}_0\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m,+}+2\sum_{j=2}^{m-1}\tau^{\pm}_j\mathfrak{u}^{\pm}_{m-j+1}+c^{\pm}_0\sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{l}^{\pm}_j c^{\pm}_{m-j}+2c^{\pm}_0\mu^{\pm}_{n,0}c^{\pm}_m,\\
&\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,0,-}=-c^{\pm}_0\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m,-}+2\tau^{\pm}_{m+1}+c^{\pm}_0\sum_{j=2}^{m-1}\mathfrak{l}^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j}+2c^{\pm}_0\mu^{\pm}_{n,0}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_m,\\
&\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,1,+}=c^{\pm}_0\mathfrak{a}^{\pm}_{m,+}+2\sum_{j=2}^{m}\tau^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j+1}-c^{\pm}_0\mathfrak{l}^{\pm}_m,\\
&\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,1,-}=c^{\pm}_0\mathfrak{a}^{\pm}_{m,-}+2\sum_{j=2}^{m-1}\tau^{\pm}_j c^{\pm}_{m-j+1}-c^{\pm}_0\sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{l}^{\pm}_j\mathfrak{u}^{\pm}_{m-j}.
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

Числа $\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,0,+}$, $\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,0,-}$, $\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,1,+}$ обращаются в нуль, если $c^{\pm}_m$, $\tau^{\pm}_{m+1}$ и $\lambda^{\pm}_m$ определены согласно (7.24), (7.25), (7.26).

Докажем, что $\mathfrak{f}^{\pm}_{m+1,1,-}=0$. Из формул (7.19) и (7.28) вытекает, что функции $\widehat{\psi}^{\pm}_{i,\pm}$ 1-периодичны для четных n и 1-антипериодичны для нечетных и удовлетворяют уравнениям

$$
\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2n^2\right)\widehat{\psi}^{\pm}_{2,+}=(a-\mu^{\pm}_{n,0})\zeta^{\pm}_{n,0},\quad \xi\in\mathbb{R},
\tag{7.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2n^2\right)\widehat{\psi}^{\pm}_{i+2,+}={}&2\sum_{j=2}^{i-2}\tau^{\pm}_j\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}^{\pm}_{i-j+1,-}+a\widehat{\psi}^{\pm}_{i,+}-\mathfrak{a}^{\pm}_{i,+}\zeta^{\pm}_{n,0}-\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{i,+}\zeta^{\mp}_{n,0}\\
&-\sum_{j=0}^{i-2}\mathfrak{l}^{\pm}_j\widehat{\psi}^{\pm}_{i-j,+}+c^{\pm}_i(a+\mu^{\pm}_{n,0})\zeta^{\mp}_{n,0},\quad \xi\in\mathbb{R},\quad i\geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2n^2\right)\widehat{\psi}^{\pm}_{i+2,-}={}&2\sum_{j=2}^{i-1}\tau^{\pm}_j\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}^{\pm}_{i-j+1,+}+a\widehat{\psi}^{\pm}_{i,-}-\mathfrak{a}^{\pm}_{i,-}\zeta^{\pm}_{n,0}-\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{i,-}\zeta^{\mp}_{n,0}\\
&-\sum_{j=0}^{i-3}\mathfrak{l}^{\pm}_j\widehat{\psi}^{\pm}_{i-j,-}+\mathfrak{u}^{\pm}_i(a-\mu^{\pm}_{n,0})\zeta^{\pm}_{n,0}+\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_i(a+\mu^{\pm}_{n,0})\zeta^{\mp}_{n,0},\quad \xi\in\mathbb{R},\quad i\geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{7.33}
$$

При выводе этих уравнений мы также учли равенства (7.28). Используя уравнения (7.31)–(7.33) и равенства (7.23), (7.28), вычислим следующую сумму:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}^{\pm}_{m,-}+\sum_{j=2}^{m-1}c^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m-j,-}={}&\big(\widehat{\psi}^{\pm}_{m,-},(a-\mu^{\pm}_{n,0})\zeta^{\pm}_{n,0}\big)+\sum_{j=1}^{m-1}c^{\pm}_j\big(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,-},(a+\mu^{\pm}_{n,0})\zeta^{\mp}_{n,0}\big)\\
={}&\sum_{j=0}^{m-3}\left(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,-},\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\pi^2n^2\right)\widehat{\psi}^{\pm}_{j+2,+}\right)-2\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{p=2}^{j-2}\tau^{\pm}_p\left(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,-},\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}^{\pm}_{j-p+1,-}\right)\\
&-\sum_{j=2}^{m-1}\big(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,-},a\widehat{\psi}^{\pm}_{j,+}\big)+\sum_{j=1}^{m-3}\sum_{p=0}^{m-2}\mathfrak{l}^{\pm}_p\big(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,-},\widehat{\psi}^{\pm}_{j-p,+}\big).
\end{aligned}
$$

Совершенно аналогично (5.26) несложно показать, что второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Производя замену индекса суммирования $j\mapsto m-j-2$ и двукратное интегрирование по частям в первом слагаемом в правой части последнего равенства, замену индекса суммирования $j\mapsto m-j$ в третьем слагаемом, с учетом (7.28), (7.31)–(7.33) получаем

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}^{\pm}_{m,-} + \sum_{j=2}^{m-1} c^{\pm}_j \widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m-j,-} &= 2\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{p=2}^{j-1}\tau^{\pm}_p\left(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,+}, \frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}^{\pm}_{j-p+1,+}\right) + \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{a}^{\pm}_{m-j,+}\\
&+ \sum_{j=1}^{m-2}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m-j,+} - \sum_{j=1}^{m-2}\sum_{p=0}^{j-3}\mathfrak{l}^{\pm}_p\big(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,+}, \widehat{\psi}^{\pm}_{j-p,-}\big) + \sum_{j=1}^{m-3}\sum_{p=0}^{j-2}\mathfrak{l}^{\pm}_p\big(\widehat{\psi}^{\pm}_{m-j,-}, \widehat{\psi}^{\pm}_{j-p,+}\big).
\end{aligned}
$$

Аналогично (5.26) доказывается, что первое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Сумма четвертого и пятого слагаемых равна нулю, что следует из равенств (7.28) и леммы 2.6 с $p = m$, $s = 1$, $A_j = \mathfrak{l}^{\pm}_j$, $B_{i,j} = \big(\widehat{\psi}^{\pm}_{i,+}, \widehat{\psi}^{\pm}_{j,-}\big)$. Следовательно,

$$
\mathfrak{a}^{\pm}_{m,-} + \sum_{j=2}^{m-1} c^{\pm}_j \widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m-j,-} = \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{a}^{\pm}_{m-j,+} + \sum_{j=1}^{m-2}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m-j,+}.
$$

Используя данное равенство, (7.16), (7.25), (7.26), (7.28) и применяя лемму 2.6 с $p = m$, $s = 1$, $A_0 = A_1 = 0$, $A_j = \mathfrak{l}^{\pm}_j$, $j \geqslant 2$, $B_{i,j} = c^{\pm}_i\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_j$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}^{\pm}_{m,-} + \frac{2}{c^{\pm}_0}\sum_{j=2}^{m-1} c^{\pm}_j\tau^{\pm}_{m-j+1}\\
&= \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{a}^{\pm}_{m-j,+} + \sum_{j=1}^{m-2}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{m-j,+} - 2\mu_{n,0}\sum_{j=2}^{m-1}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j}c^{\pm}_j - \sum_{j=2}^{m-3}\sum_{p=2}^{m-j-1}\mathfrak{l}^{\pm}_p c^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j-p}\\
&= \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{a}^{\pm}_{m-j,+} + \sum_{j=2}^{m-1}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j}\big(\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{j,+} - 2\mu^{\pm}_{n,0}c^{\pm}_j\big) - \sum_{j=3}^{m-2}\sum_{p=2}^{j-1}\mathfrak{l}^{\pm}_p c^{\pm}_{m-j}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{j-p}\\
&= \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{a}^{\pm}_{m-j,+} + \frac{2}{c^{\pm}_0}\sum_{j=2}^{m-1}\sum_{p=2}^{j-1}\tau^{\pm}_p\mathfrak{u}^{\pm}_{j-p+1}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j}.
\end{aligned}
$$

Преобразуем последнее слагаемое в правой части полученного равенства:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{m-1}\sum_{p=2}^{j-1}\tau^{\pm}_p\mathfrak{u}^{\pm}_{j-p+1}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j} &= \sum_{p=2}^{m-2}\sum_{j=p+1}^{m-1}\tau^{\pm}_p\mathfrak{u}^{\pm}_{j-p+1}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j}\\
&= \sum_{p=2}^{m-2}\sum_{j=2}^{m-p}\tau^{\pm}_p\mathfrak{u}^{\pm}_j\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j-p+1}\\
&= \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\sum_{p=2}^{m-j}\tau^{\pm}_p\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j-p+1},
\end{aligned}
$$

Полученные равенства и (7.24) позволяют продолжить вычисления:

$$
\mathfrak{a}^{\pm}_{m,-} + \frac{2}{c^{\pm}_0}\sum_{j=2}^{m-1}c^{\pm}_j\tau^{\pm}_{m-j+1} = \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{a}^{\pm}_{m-j,+} + \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\sum_{p=2}^{m-j}\tau^{\pm}_p\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_{m-j-p+1} = \sum_{j=2}^{m-2}\mathfrak{u}^{\pm}_j\mathfrak{l}^{\pm}_{m-j},
$$

откуда в силу (7.30) вытекает равенство $\mathfrak{f}_{m+1,1,-} = 0$.

Таким образом, функции $f^{\pm}_{m+1,0}$ финитны. В силу леммы 7.1 отсюда выводим, что уравнения (7.29) разрешимы в $\mathcal{V}$ и их решения даются формулами (7.20), где $c^{\pm}_{m+1}$ — некоторые константы, а функции $u_{i,0}, \widetilde{u}_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$ удовлетворяют условию (7.9).

Подставляя представления (7.18)–(7.20) для функций $\psi^{\pm}_i$, $i \leqslant m+1$, в уравнение (7.3) с $i = m$, получаем, что функция $\psi^{\pm}_{m+2}$ является решением уравнения

$$
-\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \pi^2 n^2\right)\psi^{\pm}_{m+2} = G^{\pm}_{m+2}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^2,
$$

где правая часть дается формулой (7.21). С учетом вида функций $G^{\pm}_{m+2}$, равенств (7.23) для $i \leqslant m+1$ и (2.20) с $N=1$ и леммы 2.5, аналогично (4.13)–(4.15) нетрудно доказать, что справедливо представление (7.18), (7.19) для функции $\psi^{\pm}_{m+2}$, где $u^{\pm}_{m+2,j}$, $j=0,1$ — некоторые функции, и верны равенства (7.23) с $i=m+2$. □

Вычислим числа $\tau^{\pm}_3$ и $\tau^{\pm}_4$. Из формул (7.25), (7.28) следует, что $\tau^{\pm}_3=0$. Допустим, что $\tau^{\pm}_2=0$, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

В этом случае $\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_1=0$. С учетом сделанного предположения из (7.25) выводим

$$\tau^{\pm}_4=c^{\pm}_0\left(\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{3,-}-2\mu^{\pm}_{n,0}\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_3\right)/2.$$

В данном случае уравнение для $\widehat{\psi}^{\pm}_{3,-}$ в (7.31)–(7.33) имеет нулевую правую часть, а потому $\widehat{\psi}^{\pm}_{3,-}=0$. Следовательно, $\widetilde{\mathfrak{a}}^{\pm}_{3,-}=0$ и

$$\tau^{\pm}_4=-\mu^{\pm}_{n,0}c^{\pm}_0\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_3. \tag{7.34}$$

Из (7.14) и (7.24) вытекает, что $\lambda^{\pm}_2=\mathfrak{a}^{\pm}_{2,+}$, $\widehat{\psi}^{\pm}_{2,+}=\widetilde{\psi}^{\pm}_2$, что в силу (5.5), (7.4), (7.22) дает

$$f^{\pm}_{3,1}=-c^{\pm}_0\left(\frac{d^2}{dx^2}-V\right)u^{\pm}_{2,0}.$$

Из последнего равенства и (7.11)–(7.13), (7.15), (7.16) выводим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{u}}^{\pm}_3&=\int\limits_{\mathbb{R}} f^{\pm}_{3,1}\,\mathrm{d}x=c^{\pm}_0\int\limits_{\mathbb{R}} Vu^{\pm}_{2,0}\,\mathrm{d}x\\
&=2\int\limits_{\mathbb{R}} u^{\pm}_{2,0}\frac{d\widetilde{u}^{\pm}_1}{dx}=-2\int\limits_{\mathbb{R}}\widetilde{u}^{\pm}_1\frac{du^{\pm}_{2,0}}{dx}\,\mathrm{d}x\\
&=-c^{\pm}_0\int\limits_{\mathbb{R}}\widetilde{u}^{\pm}_1\left(\frac{d^2}{dx^2}-V+2\mu^{\pm}_{n,0}\right)\widetilde{u}^{\pm}_1\,\mathrm{d}x\\
&=c^{\pm}_0\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{d\widetilde{u}^{\pm}_1}{dx}\right)^2\mathrm{d}x-2\mu^{\pm}_{n,0}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{u}^{\pm}_1\right)^2\,\mathrm{d}x\right)+2\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{u}^{\pm}_1\right)^2\frac{d\widetilde{u}^{\pm}_1}{dx}\,\mathrm{d}x\\
&=c^{\pm}_0\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{d\widetilde{u}^{\pm}_1}{dx}\right)^2\mathrm{d}x-2\mu^{\pm}_{n,0}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{u}^{\pm}_1\right)^2\,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

откуда в силу (7.13), (7.34) следует

$$\tau^{\pm}_4=-\frac{2\mu^{\pm}_{n,0}}{\pi^4n^4}\left(2\int\limits_{\mathbb{R}} V^2(x)\,\mathrm{d}x-\mu^{\pm}_{n,0}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-t)V(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\right), \tag{7.35}$$

если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Пусть $m\geqslant 2$. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\tau^{\pm}_{\varepsilon,m}:=\sum_{i=2}^{m}\varepsilon^i\tau^{\pm}_i,\\
&\lambda^{\pm}_{\varepsilon,m}:=\frac{\pi^2n^2}{\varepsilon^2}+\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i\lambda^{\pm}_i,\\
&\psi^{\pm}_{\varepsilon,m}(x):=h(x,\tau^{\pm}_{\varepsilon,m})\left(\zeta^{\pm}_{n,0}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i\psi^{\pm}_i\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right).
\end{aligned}$$

Из леммы 7.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 7.3. *Функция* $\psi^{\pm}_{\varepsilon,m} \in C^2(\mathbb{R})$ *при* $\varepsilon \to 0$ *удовлетворяет равенству*

$$\left\| \psi^{\pm}_{\varepsilon,m}(x) - \zeta^{\pm}_{n,0}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L_2(Q)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

для любого $Q \in \mathfrak{C}$. *Функции* $\psi^{\pm}_{\varepsilon,m}$ *и* $\lambda^{\pm}_{\varepsilon,m}$ *удовлетворяют уравнению* (5.34) *с* $\psi_{\varepsilon,m} = \psi^{\pm}_{\varepsilon,m}$, $\lambda_{\varepsilon,m} = \lambda^{\pm}_{\varepsilon,m}$, $f_{\varepsilon,m} = f^{\pm}_{\varepsilon,m}$, *где для функции* $f^{\pm}_{\varepsilon,m}$ *справедливы оценки* (5.35).

Допустим, что существуют числа $\mathfrak{n}_{\pm}$ такие, что $\tau^{\pm}_i = 0$, $i \leqslant \mathfrak{n}_{\pm} - 1$, $\tau_{\mathfrak{n}_{\pm}} \neq 0$. Отметим, что из формул (7.16), (7.35) следует, что по крайней мере одно из чисел τ^-_2, τ^-_4 не равно нулю, а потому $\mathfrak{n}_- \leqslant 4$. Возьмем $m \geqslant 4\mathfrak{n} - 2$, где $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_-$ или $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_+$. Положим

$$k^{\pm}_{\varepsilon,m} := \sqrt{\pm\big(\mu^{\pm}_n(\varepsilon^2) - \lambda^{\pm}_{\varepsilon,m}\big)}.$$

Ветвь корня в этом определении выберем следующим образом. Если подкоренное выражение положительно, то $k^{\pm}_{\varepsilon,m}$ возьмем по знаку совпадающим со знаком $\tau_{\mathfrak{n}_{\pm}}$. Если подкоренное выражение отрицательно, то величину $k^{\pm}_{\varepsilon,m}$ выберем из условия положительности мнимой части этого числа. Обозначим

$$\tau^{\pm}_m(\varepsilon) := \varepsilon^{-1}\left(\ln \varkappa_{\pm}(\varepsilon, k^{\pm}_{\varepsilon,m}) - \ln((-1)^n)\right).$$

Лемма 7.4. *Для любого* m *выполнены соотношения*

$$\tau^{\pm}_m(\varepsilon) = \tau^{\pm}_{\varepsilon,m} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-2\mathfrak{n}_{\pm}-1}), \quad \lambda^+_{\varepsilon,m} \leqslant \mu^+_n(\varepsilon^2), \quad \lambda^-_{\varepsilon,m} \geqslant \mu^-_n(\varepsilon^2). \tag{7.36}$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\lambda^{\pm}_{2j} = \mu^{\pm}_{n,j}, \quad \lambda^{\pm}_{2j+1} = 0, \quad j \leqslant \mathfrak{n}_{\pm} - 2, \\ &\lambda^{\pm}_{2\mathfrak{n}_{\pm}-2} = \mu^{\pm}_{n,\mathfrak{n}_{\pm}-1} \mp \frac{2\pi^2 n^2 \left(\tau^{\pm}_{\mathfrak{n}_{\pm}}\right)^2}{\mu_{n,0}}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Доказательство. С учетом равенств (6.11) функции $\Theta^{\pm}_{\pm}$ из (6.8) выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta^+_{\pm}(\xi) &= \widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi, \varkappa^{-1}_{\pm}), \\ \Theta^-_{\pm}(\xi) &= \widetilde{\Theta}^1_{\pm}(\xi, \varkappa_{\pm}), \end{aligned} \tag{7.38}$$

где функция $\widetilde{\Theta}^1_{\pm}$ из (6.10). Данные функции линейно независимы, так как их вронскиан имеет вид

$$W_{\xi}\left(\Theta^+_{\pm}(\xi), \Theta^-_{\pm}(\xi)\right) = \left(\varkappa_{\pm} - \varkappa^{-1}_{\pm}\right)\Theta_{\pm,2}(1) \tag{7.39}$$

и в силу (6.2), (6.7) не равен нулю при малых ε и $k \neq 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta}^+_{\pm}(\xi) &:= \mathrm{e}^{-\xi \ln((-1)^n)} \Theta^+_{\mathrm{per},\pm}(\xi, \varepsilon, k^{\pm}_{\varepsilon,m}), \\ \widetilde{\Theta}^-_{\pm}(\xi) &:= \mathrm{e}^{\xi \ln((-1)^n)} \Theta^-_{\mathrm{per},\pm}(\xi, \varepsilon, k^{\pm}_{\varepsilon,m}). \end{aligned}$$

Функции $\widetilde{\Theta}^+_{\pm}(\xi)$ и $\widetilde{\Theta}^-_{\pm}(\xi)$ 1-периодичны для четных n и 1-антипериодичны для нечетных n, что следует из периодичности функций $\Theta^{\pm}_{\mathrm{per},\pm}$. Из (6.2) вытекает, что в норме $C^2[0,1]$ верны равенства

$$\begin{aligned} \widetilde{\Theta}^+_{\pm}(\xi) &= \zeta^+_{n,0}(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \widetilde{\Theta}^-_{\pm}(\xi) &= \zeta^-_{n,0}(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В силу леммы 7.2 при $x \geqslant x_0$ функция $\psi_{\varepsilon,m}$ имеет вид

$$\psi^{\pm}_{\varepsilon,m}(x) = \mathrm{e}^{-\tau^{\pm}_{\varepsilon,m} x} \psi^{per,\pm}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$\psi^{per,\pm}_{\varepsilon,m}(\xi)=\zeta^{\pm}_{n,0}(\xi)+\varepsilon\widetilde{\psi}^{per,\pm}_{\varepsilon,m}(\xi),$$

где функция $\widetilde{\psi}^{per,\pm}_{\varepsilon,m}(\xi)$ 1-периодична для четных n и 1-антипериодична для нечетных n. Используя перечисленные выше свойства функций $\psi_{\varepsilon,m}$ и $\widetilde{\Theta}^{\pm}_{\pm}$, лемму 7.3 и выбирая функцию $\mathcal{U}$ вместо (5.39) в виде

$$\mathcal{U}(x,\varepsilon):=W_x\left(\widetilde{\Theta}^{\pm}_{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\psi^{per,\pm}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)+\left(\tau^{\pm}_{m}(\varepsilon)-\tau^{\pm}_{\varepsilon,m}\right)\widetilde{\Theta}^{\pm}_{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi^{per,\pm}_{\varepsilon,m}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

совершенно аналогично выводу равенства (5.42) в доказательстве леммы 5.4 нетрудно показать, что верно равенство (5.42) с $\tau_{\varepsilon,m}=\tau^{\pm}_{\varepsilon,m}$, $\tau_m(\varepsilon)=\tau^{\pm}_{m}(\varepsilon)$. Из (1.3), (1.5) и формул (1.16), (1.18) для $\lambda^{\pm}_{0}$, $\lambda^{\pm}_{1}$ следует, что $k^{\pm}_{\varepsilon,m}\to 0$, $\varepsilon\to 0$. Отсюда в силу (6.7) вытекает

$$\tau^{\pm}_{m}(\varepsilon)=\frac{\varepsilon k^{\pm}_{\varepsilon,m}\sqrt{\mu_{n,0}}}{\sqrt{2}\pi n}\left(1+\mathcal{O}(\varepsilon)\right).$$

Подстановка полученного равенства в (5.42) дает

$$\varepsilon^2\frac{\mu_{n,0}\left(k^{\pm}_{\varepsilon,m}\right)^2}{2\pi^2n^2}\left(1+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)=\left(\tau^{\pm}_{\varepsilon,m}\right)^2+\mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}).$$

Полагая $m=2\mathfrak{n}_{\pm}+2$, получаем

$$\left(k_{\varepsilon,2\mathfrak{n}_{\pm}+2}\right)^2=\varepsilon^{2\mathfrak{n}^{\pm}-2}\frac{2\pi^2n^2\left(\tau^{\pm}_{\mathfrak{n}_{\pm}}\right)^2}{\mu_{n,0}}+\mathcal{O}(\varepsilon^{2\mathfrak{n}_{\pm}-1}) \tag{7.40}$$

С учетом определения $k^{\pm}_{\varepsilon,m}$ из последнего равенства выводим

$$\lambda^{\pm}_{\varepsilon,2\mathfrak{n}_{\pm}-2}=\mu^{\pm}_{n,0}(\varepsilon^2)\mp\varepsilon^{2\mathfrak{n}_{\pm}-2}\frac{2\pi^2n^2\left(\tau^{\pm}_{\mathfrak{n}_{\pm}}\right)^2}{\mu_{n,0}}+\mathcal{O}(\varepsilon^{2\mathfrak{n}_{\pm}-1}),$$

откуда и из (1.3) следуют формулы (7.37) и неравенства (7.36) для $\lambda^{\pm}_{\varepsilon,m}$. Из этих неравенств и (6.7) выводим, что $k^{\pm}_{\varepsilon,m}$ вещественно, а $\tau^{\pm}_{m}(\varepsilon)$ и $\tau^{\pm}_{\varepsilon,m}$ совпадают по знаку. Из равенства (5.42) для $\tau^{\pm}_{m}(\varepsilon)$ и $\tau^{\pm}_{\varepsilon,m}$ вытекает равенство (7.36) для $\tau_m(\varepsilon)$. □

Из доказанной леммы и (7.17) следуют формулы (1.16), (1.18).

Лемма 7.5. *Существует функция $R^{\pm}_{\varepsilon,m}(x)\in C^2(\mathbb{R})$ такая, что функция*

$$\widehat{\psi}^{\pm}_{\varepsilon,m}:=\psi^{\pm}_{\varepsilon,m}(x)-R^{\pm}_{\varepsilon,m}(x)$$

удовлетворяет уравнению (3.18) *с* $\lambda=\lambda^{\pm}_{\varepsilon,m}$, $f(x)=\widehat{f}^{\pm}_{\varepsilon,m}(x)$, $\operatorname{supp}\widehat{f}^{\pm}_{\varepsilon,m}\subseteq[-x_0,x_0]$, *и условиям* (6.9) *с* $k=k^{\pm}_{\varepsilon,m}$, *и верны оценки*

$$\|R^{\pm}_{\varepsilon,m}\|_{C^2(\overline{Q})}=\mathcal{O}(\varepsilon^{m-4\mathfrak{n}_{\pm}+3}),$$
$$\|\widehat{f}^{\pm}_{\varepsilon,m}\|_{C[-x_0,x_0]}=\mathcal{O}(\varepsilon^{m-4\mathfrak{n}_{\pm}+3}),$$

для любого интервала $Q\in\mathfrak{C}$.

Доказательство леммы проводится совершенно аналогично доказательству леммы 5.5. Функции $\mathcal{U}$ и $\Theta^{\pm}_{\pm}$ следует выбирать так же, как и в доказательстве леммы 7.4. Вместо оценки (5.44) следует использовать неравенство

$$\left|W_x\left(\Theta^{+}_{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\Theta^{-}_{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right|\geqslant C\varepsilon^3\left(k^{\pm}_{\varepsilon,m}\right)^3\geqslant C\varepsilon^{3\mathfrak{n}_{\pm}},$$

где положительная константа C не зависит от ε. Данное неравенство является следствием соотношений (6.2), (7.38), (7.39).

Обозначим

$$g_{\varepsilon,m}^{\pm} := \widehat{f}_{\varepsilon,m}^{\pm} - V\widehat{\psi}_{\varepsilon,m}^{\pm}.$$

Из лемм 7.3, 7.5 выводим, что

$$\left\| g_{\varepsilon,m}^{\pm}(x) - V(x)\zeta_{n,0}^{\pm}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2(-x_0,x_0)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{7.41}$$

Согласно лемме 7.5 функция $\widehat{\psi}_{\varepsilon,m}^{\pm}$ является решением задачи (3.18), (6.9) с $\lambda = \lambda_{\varepsilon,m}^{\pm}$, $k = k_{\varepsilon,m}^{\pm}$, $f = \widehat{f}_{\varepsilon,m}^{\pm}$, а потому в силу леммы 6.4, 6.7

$$g_{\varepsilon,m}^{\pm} = (\mathrm{I} + \varepsilon V T_{11}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm}))^{-1}\widehat{f}_{\varepsilon,m}^{\pm}$$

и верно представление

$$g_{\varepsilon,m}^{\pm} = \frac{T_{18}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm})\widehat{f}_{\varepsilon,m}^{\pm}}{k_{\varepsilon,m}^{\pm} - k_{\varepsilon,\pm}} g_{\varepsilon,\pm} + T_{19}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm})\widehat{f}_{\varepsilon,m}^{\pm}. \tag{7.42}$$

Аналогично тому, как из (5.52) была получена оценка (5.54), из последнего равенства на основе (6.32), (7.41) и лемм 6.7, 7.5 нетрудно вывести, что

$$k_{\varepsilon}^{\pm} - k_{\varepsilon,m}^{\pm} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-4\mathfrak{n}_{\pm}+4}). \tag{7.43}$$

Отсюда в силу (6.6), (6.7) и (7.40) следует

$$k_{\varepsilon,\pm} = \varepsilon^{\mathfrak{n}_{\pm}-1}\frac{\sqrt{2}\pi n \tau_{\mathfrak{n}_{\pm}}^{\pm}}{\sqrt{\mu_{n,0}}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\mathfrak{n}_{\pm}}).$$

В силу леммы 6.6 оператор H_{ε} имеет собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\pm}$, удовлетворяющее равенству (1.13) с $\mu = \mu_n^{\pm}$ тогда и только тогда, когда $\tau_{\mathfrak{n}_{\pm}}^{\pm} > 0$. Как следует из (7.43), асимптотика собственного значения $\lambda_{\varepsilon,\pm}$ в этом случае совпадает с соответствующим из рядов (1.15), (1.17), с коэффициентами, определенными в настоящем параграфе. Из формул (1.5), (7.13) выводим, что в случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V\,\mathrm{d}x > 0$$

выполнено неравенство $\tau_2^- > 0$. Если

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V\,\mathrm{d}x = 0,$$

то $\tau_2^- = 0$, $\tau_3^- = 0$, и согласно (7.35) $\tau_4^- > 0$. Следовательно, критерием существования собственного значения $\lambda_{\varepsilon,-}$ является неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} V\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Утверждение (1) теоремы 1.5, а также теоремы 1.6 и 1.7 полностью доказаны.

Допустим, что собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\pm}$ существует. Выясним в этом случае асимптотику соответствующей собственной функции $\psi_{\varepsilon,\pm}$.

Аналогично тому, как было доказано (4.23), из (6.29), (6.32), (7.41) и лемм 6.7, 7.3, 7.5 нетрудно вывести существование функции $c_{\pm}(\varepsilon)$, удовлетворяющей равенствам

$$c_{\pm}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon T_{18}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm})\widehat{f}_{\varepsilon,m}^{\pm}}{k_{\varepsilon,m}^{\pm} - k_{\varepsilon,\pm}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-4\mathfrak{n}_{\pm}+3}),$$
$$c_{\pm}(\varepsilon) = 1 + o(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

для всех m. Отсюда и из (6.29), (6.32), (7.42), леммы 7.5 и равномерной ограниченности оператора $T_{20}^{\pm}$ выводим равенство

$$\varepsilon g_{\varepsilon,m}^{\pm} = c_{\pm}(\varepsilon) g_{\varepsilon,\pm} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-4\mathfrak{n}_{\pm}+3}), \tag{7.44}$$

верное в норме $L_2(-x_0, x_0)$. В силу (6.15) функция $\widehat{\psi}_{\varepsilon,m}^{\pm}$ выражается через $g_{\varepsilon,m}^{\pm}$ следующим образом:

$$\widehat{\psi}_{\varepsilon.m}^{\pm} = \varepsilon T_{11}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm}) g_{\varepsilon,m}^{\pm}.$$

Из (6.7), (6.18) следует, что для любого $Q \in \mathfrak{C}$ оператор $T_{11}^{\pm}(\varepsilon, k) : L_2(-x_0, x_0) \to W_2^2(Q)$ удовлетворяет равномерным по ε и k оценкам

$$\|T_{11}^{\pm}\| \leqslant C\varepsilon^{-2}k, \quad \left\| \frac{dT_{11}^{\pm}}{dk} \right\| \leqslant C\varepsilon^{-2}k^{-2}.$$

Учитывая данные оценки, (7.43), лемму 7.5 и применяя к (7.44) оператор $T_{11}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm})$, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{\varepsilon,m}^{\pm} &= c_{\pm}(\varepsilon)\psi_{\varepsilon,\pm} + c_{\pm}(\varepsilon)\left(T_{11}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,m}^{\pm}) - T_{11}^{\pm}(\varepsilon, k_{\varepsilon,\pm})\right) g_{\varepsilon,\pm} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-5\mathfrak{n}_{\pm}+2}) \\ &= c_{\pm}(\varepsilon)\psi_{\varepsilon,\pm} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m-6\mathfrak{n}_{\pm}+4}), \end{aligned}$$

где равенство выполнено в норме $W_2^2(Q)$ для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Таким образом, доказана

Теорема 7.1. *Пусть существует собственное значение $\lambda_{\varepsilon,\pm}$. Соответствующую ему собственную функцию $\psi_{\varepsilon,\pm}$ можно выбрать так, что она будет удовлетворять асимптотическому разложению* (7.1) *в норме $W_2^2(Q)$ для любого $Q \in \mathfrak{C}$. Коэффициенты данного разложения определяются согласно* (7.10), (7.13), (7.14), (7.16) *и лемме* 7.2. *При $\pm x \geqslant x_0$ для данной собственной функции справедливы равенства* (6.9), *причем для мультипликаторов $\varkappa_{\pm}$ и $\varkappa_{\pm}^{-1}$, соответствующих функциям $\Theta_{\pm}^{+}$ и $\Theta_{\pm}^{-}$, выполнено равенство $\varkappa_{\pm} = (-1)^n \mathrm{e}^{-\tau_{\varepsilon}^{\pm}}$, где функция $\tau_{\varepsilon}^{\pm}$ имеет асимптотику* (7.2) *с коэффициентами, определенными формулами* (7.16), (7.35) *и леммой* 7.2.

Автор благодарен Р. Р. Гадыльшину за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей*, Киев, Наукова думка, 1974.
2. A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* N.Y.: North-Holland, 1978.
3. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, М., Наука, 1984.
4. Е. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, М., Мир, 1984.
5. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, М., Изд-во МГУ, 1990.
6. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, М., Физ.-мат.лит., 1993.
7. А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и некоторые приложения*, Новосибирск, Тамара Рожковская, 2006.
8. J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn, *Photonic Crystals. Molding the Flow of Light*, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1995.
9. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела* Т. 1. М., Мир, 1979.
10. P. Kuchment, “The mathematics of photonic crystals”, In: *Mathematical Modeling in Optical Science*, Frontiers Appl. Math. **22**, SIAM Philadelphia, PA, 2001, pp. 207–272.

11. В. В. Жиков, "О лакунах в спектре некоторых дивергентных эллиптических операторов с периодическими коэффициентами", *Алгебра Анал.* **16** (2004), no. 5, 34–58.

12. В. С. Буслаев, "Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами", *Успехи мат. наук* **42** (1987), no. 6, 77–98.

13. M. Marx, *On the Eigenvalues for Slowly Varying Perturbations of a Periodic Schrödinger Operator*, Preprint: `arXiv:math-ph/0503031`.

14. М. Ш. Бирман, "О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны", *Алгебра Анал.* **15** (2003), no. 4, 61–71.

15. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, "Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения", *Алгебра Анал.* **15** (2003), no. 5, 1–108.

16. Т. А. Суслина, "Усреднение стационарной системы Максвелла", *Алгебра Анал.* **16** (2004), no. 5, 162–244.

17. Т. А. Суслина, "Об усреднении периодического эллиптического оператора в полосе", *Алгебра Анал.* **16** (2004), no. 1, 269–292.

18. Д. И. Борисов, "Асимптотики спектра оператора Шредингера, возмущенного быстро осциллирующим периодическим потенциалом", *Докл. АН* **406** (2006), no. 2, 151–155.

19 И. М. Глазман, *Прямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов*, М., Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963.

20. B. Simon, "The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions", *Ann. Physics* **97** (1976), no. 2, 279–288.

21. M. Klaus, "On the bound state of Schrödinger operators in one dimension", *Ann. Physics* **108** (1977), no. 2, 288-300.

22. Ф. С. Рофе-Бекетов, "Признак конечности числа дискретных уровней ,вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала", *Докл. АН СССР* **156** (1964), no. 3, 515–518.

23. В. А. Желудев, "О собственных значениях возмущенного оператора Шредингера с периодическим потенциалом", *Проблемы мат. физики* **2** (1967), 108–123.

24. В. А. Желудев, "О возмущении спектра одномерного самосопряженного оператора Шредингера с периодическим потенциалом", *Проблемы мат. физики* **3** (1968), 31–48.

25. F. Gesztesy and B. Simon, "A short proof of Zheludev's theorem", *Trans. Am. Math. Soc.* **335** (1993), no. 1, 329–340.

26. Н. Е. Фирсова, "О формуле Левинсона для возмущенного оператора Хилла", *Теор. мат. физ.* **62** (1985), no. 2, 196–209.

27. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.

28. F. A. Berezin and M. A. Shubin, *The Schrödinger Equation*, Dordrecht-Boston-London, Kluwer Academic Publishers, 1991.

29. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальным уравнением второго порядка. Т. 2*, М., Изд-во ин. лит-ры, 1961.

30. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, М., Наука, 1965.

31. Р. Р. Гадыльшин, "О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки", *Мат. заметки* **54** (1993), no. 6, 10–21.

32. В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, М., Наука, 1976.

33. Р. Р. Гадыльшин, "О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси" ТМФ. **132** (2002), no. 1, 97–104.

34. D. Borisov, P. Exner, and R. Gadyl'shin, "Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip", J. Math. Phys. **43** (2002), no. 12, 6265–6278.

35. D. Borisov and P. Exner, "Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows", *J. Phys. A.* **37** (2004), no. 10, 3411-3428.