На правах рукописи

Борисов Денис Иванович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа-2003

Работа выполнена в Башкирском государственном педагогическом университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Р.Р. Гадыльшин
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор М.Д. Рамазанов доктор физико-математических наук, профессор Ф.Х. Мукминов
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Защита состоится "______" _________________ 2003 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 002.057.01 при Институте математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН по адресу: 450000, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики с ВЦ УНЦ РАН.

Автореферат разослан "______" _________________ 2003 г.

Ученый секретарь

специализированного совета,
к.ф.-м.н. С.В. Попенов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Краевые задачи с различного рода сингулярными возмущениями – объект исследований многих ученых. Подобный интерес объясняется тем, что, с одной стороны, сингулярно возмущенные краевые задачи часто возникают как математические модели в различных приложениях, а с другой стороны – наличием у этих задач большого числа разнообразных свойств, интересных с математической точки зрения (О. А. Олейник, А. М. Ильин, В. В. Жиков, А. С. Шамаев, В. М. Бабич, Е. Я. Хруслов, В. А. Марченко, С. М. Козлов, И. В. Скрыпник, М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Г. А. Иосифьян, Н. С. Бахвалов, В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, Н. Н. Нефедов, Г. П. Панасенко, В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, Т. А. Мельник, Дж. Коул, Г. А. Чечкин, А. Л. Пятницкий, С. Е. Пастухова, E. Sanchez-Palencia, W. Jager, A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolau, M. van Dyke, A. H. Nayfeh, Li Ta-Tsien, M. Lobo, M. E. Perez, A. Brillard, A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong и многие другие)

Диссертация посвящена изучению сингулярно возмущенных краевых задач с частой сменой типа граничных условий. Основная идея описания такого рода краевых условий состоит в выделении на границе области подмножества, состоящего из большого числа непересекающихся частей малой меры, расположенных близко друг к другу. На этом подмножестве задается граничное условие одного типа (например, условие Дирихле), в то время как на оставшейся части границы задается граничное условий другого типа (например, условие Неймана). Цель исследований – описать поведение решений, когда число компонент выделенного подмножества неограниченно растет, а расстояния между ними и их меры стремятся к нулю.

Исследование таких задач началось сравнительно недавно, с 80-х годов прошлого века. Основные усилия были направлены на выяснение вида усредненных задач при минимальном наборе ограничений на структуру чередования граничных условий, то есть, на поведение подмножеств границы с разными краевыми условиями. В этом направлении к середине 90-х годов был получен ряд результатов (О. А. Олейник, Г. А. Чечкин, А. Г. Беляев, A. Damlamian, Li Ta-Tsien, M. Lobo, M. E. Perez, A. Brillard, A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong, J. Davila).

Дальнейшие исследования были направлены, с одной стороны, на получение оценок скорости сходимости для максимально общей геометрии чередования и, с другой стороны, на построение асимптотических разложений решений. Оценки скорости сходимости для эллиптических задач были получены в работах О. А. Олейник, Г. А. Чечкина, Е. И. Дорониной, и для параболических уравнений в ряде случаев – в работах J. Filo и S. Luckhaus. Асимптотические разложения решения одной модельной краевой задачи для уравнения Пуассона в многомерном слое с частым периодическим чередованием были получены Г. А. Чечкиным. Асимптотические разложения собственных значений оператора Лапласа в двумерных областях с периодической структурой чередования для ряда случаев были построены в работах Р. Р. Гадыльшина. Первые члены асимптотических разложений решений параболических задач для некоторых случаев были построены в работах J. Filo и S. Luckhaus.

Настоящая диссертация посвящена дальнейшему развитию последнего направления. В диссертации строятся двупараметрические асимптотические разложения для случаев, ранее не рассматривавшихся. Исследуются двух- и трехмерные задачи. Изучаются случаи как чередования периодической структуры, так и принципиально непериодическое чередование.

Цель работы. Основная цель работы – построение двупараметрических асимптотических разложений собственных элементов оператора Лапласа в двух- и трехмерных областях с часто чередующимися граничными условиями Дирихле и Неймана. Здесь два характерных параметра, по которым строятся асимптотики, описывают линейные размеры частей границы с краевыми условиями Дирихле и Неймана. Двумерные задачи изучаются в следующих ситуациях:

- случай локально периодического чередования и усредненной первой краевой задачи;
- случай принципиально непериодического чередования и усредненной второй и третьей краевых задач.

Трехмерная задача рассматривается на примере цилиндра с частой сменой граничных условий на боковой поверхности. Рассматриваются ситуации, когда усредненная задача содержит как первое, так и третье (второе – как частный случай) краевое условие на боковой поверхности.

Научная новизна. Основные научные результаты диссертации являются новыми.

В диссертации изучаются краевые задачи на собственные значения оператора Лапласа с частой сменой граничных условий Дирихле и Неймана. В во всех задачах выделяются два характерных параметра, описывающих чередование. Первый параметр характеризует линейные размеры частей границы с условием Неймана, второй – отношение мер частей границы с условием Неймана и с условием Дирихле.

В первой главе рассматривается двумерная задача в произвольной области с локально периодическим чередованием в случае усредненной задачи Дирихле. Построены полные двупараметрические асимптотические разложения собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям, а также асимптотики соответствующих собственных функций. В случае круга со строго периодическим чередованием построены полные двупараметрические асимптотические разложения собственных значений, сходящихся к двукратным предельным собственным значениям, а также асимптотики соответствующих собственных функций. Проанализирована зависимость асимптотик от обоих параметров.

Во второй главе рассматривается двумерная краевая задача с непериодическим чередованием в случае усредненной второй или третьей задачи. Построены первые члены двупараметрических асимптотических разложений, сходящихся к простым предельным собственным значениям, и асимптотики соответствующих собственных функций. Даны явные формулы для построенных членов асимптотик, зависящие как от собственных элементов усредненных задач, так и от геометрии чередования.

В третьей главе рассмотрена краевая задача в цилиндре с периодическим чередованием граничных условий на боковой поверхности. Построены первые члены двупараметрических асимптотических разложений. Рассмотрены случаи, когда усреднение приводит к первому, второму и третьему краевым условиям на боковой поверхности. Даны явные формулы для первых членов асимптотик, включающие в себя зависимость от предельных собственных элементов и от геометрии чередования.

Методика исследования. Асимптотики строятся в два этапа. Вначале проводится формальное построение асимптотических разложений, затем формальные асимптотики строго обосновываются. Формальное построение проводится на основе метода согласования асимптотических разложений, метода составных разложений и метода многих масштабов. Формальное построение нетривиальным образом учитывает геометрию чередования, включает в себя нетривиальный анализ задач, определяющих коэффициенты асимптотик, а также самих асимптотик. Обоснование формальных асимптотик проводится по достаточно стандартной схеме и основано на анализе полюсов соответствующих резольвент.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при изучении задач математической физики. Методика исследования, применявшаяся в диссертации, может быть использована при изучении других краевых задач в теории усреднения.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела дифференциальных уравнений Института математики с ВЦ УНЦ РАН, семинаре отдела уравнений математической физики Института математики и механики УрО РАН, семинаре кафедры дифференциальных уравнений МГУ им. М.В. Ломоносова, семинаре отдела теоретической физики Института ядерных исследований Чешской АН. Отдельные результаты были доложены на международной конференции "Exactly solvable models in mathematical physics" (Челябинск, 1999), международной конференции "Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы" (Уфа, 2000), международной конференции "Методы функционального анализа и теории функций в различных задачах математической физики" (Уфа, 2000), международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной столетию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2001), международных XXIII и XXIV конференций молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2001, 2002), международной конференции "Дни дифракции" (Санкт-Петербург, 2002), международной конференции "Асимптотики решений дифференциальных уравнений" (Уфа, 2002).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[8]. Работа [1] выполнена совместно с Р. Р. Гадыльшиным. Из результатов этой работы в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых в совокупности на тринадцать параграфов, двух иллюстраций, и списка литературы, содержащего 85 наименований. Общий объем диссертации – 123 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении дается обзор литературы, формулируются постановки задачи, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

Первая глава посвящена изучению двумерной краевой задачи с периодическим и локально периодическим чередованием граничных условий. Постановка задачи следующая. Пусть $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты, ω – произвольная ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, s – натуральный параметр кривой $\partial\omega$, а S – длина этой кривой, $s \in [0, S)$. Точки границы $\partial\omega$ будем описывать с помощью натурального параметра, фиксировав направление обхода (против часовой стрелки) и произвольно выбрав точку на $\partial\omega$, которой соответствует значение $s = 0$. Для удобства изложения точкам границы, которым соответствуют s, близкие к S или к нулю, сопоставим дополнительно значения $(s - S)$ и $(S + s)$. Обозначим: $N \gg 1$ – натуральное число, $\varepsilon = 2N^{-1}$ – малый положительный параметр. Для каждого значения N на границе $\partial\omega$ зададим подмножество γ_ε, состоящее из N открытых непересекающихся связных частей границы, задаваемое следующим образом. Для каждого N задаются точки $x_j^\varepsilon \in \partial\omega$, $j = 0, \ldots, N-1$, соответствующие значениям натурального параметра $s_j^\varepsilon \in [0, S)$, причем расстояние между любыми двумя соседними точками, измеренное вдоль границы $\partial\omega$ есть величина порядка ε. Далее, пусть заданы два набора из N функций каждый: $a_j(\varepsilon)$ и $b_j(\varepsilon)$, $j = 0, \ldots, N-1$, где функции a_j и b_j – неотрицательны и ограничены. Множество γ_ε определяется следующим образом:

$$\gamma_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} \gamma_{\varepsilon,j}, \quad \gamma_{\varepsilon,j} = \{\mathsf{x} : -\varepsilon a_j(\varepsilon) < s - s_j^\varepsilon < \varepsilon b_j(\varepsilon)\}.$$

Без ограничения общности считаем, что $\gamma_{\varepsilon,j}$ не пересекаются (см. рис. 1).

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad \mathsf{x} \in \omega, \tag{1}$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad \mathsf{x} \in \gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad \mathsf{x} \in \Gamma_\varepsilon, \tag{2}$$

где ν - внешняя нормаль к границе $\partial\omega$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\omega \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon$. Целью является построение асимптотических разложений собственных элементов этой задачи при $\varepsilon \to 0$.

Положим $a_N(\varepsilon) = a_0(\varepsilon)$, $b_N(\varepsilon) = b_0(\varepsilon)$, $s_N^\varepsilon = s_0^\varepsilon$. На множество γ_ε наложим следующее условие.

(C1). Существует функция $\theta(s) : [0, S] \to [0, 2\pi]$, $\theta(0) = 0$, $\theta(S) = 2\pi$, такая что для всех $j = 0, \ldots, N-1$,

$$\begin{aligned} \theta(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon)) &= \theta(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j - \varepsilon a(\varepsilon), \\ \theta(s_j^\varepsilon + \varepsilon a_j(\varepsilon)) &= \theta(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j + \varepsilon b(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3}$$

$\theta' \in C^\infty(\partial\omega)$, $0 < c_1 \le \theta'(s) \le c_2$, где c_1, c_2 – некоторые константы, не зависящие от ε и s.

Условие (C1) имеет простую геометрическую интерпретацию. Оно означает, что границу $\partial\omega$ можно гладко отобразить на окружность единичного радиуса так, что при этом отображении множество γ_ε перейдет в строго периодическое множество (см. (3)).

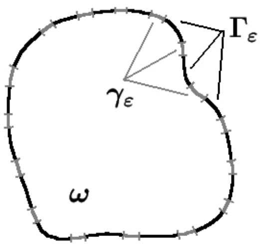

Рисунок 1.

Первая глава посвящена исследованию случая, когда усреднение в задаче (1), (2) приводит к условию Дирихле. Согласно результатам усреднения, полученным в работах Г. А. Чечкина и A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong, собственные значения задачи (1), (2) сходятся к собственным значениям задачи Дирихле с сохранением совокупной кратности при выполнении равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = 0, \quad \eta(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon) + b(\varepsilon)}{2}. \tag{4}$$

Одним из основных результатов первой главы является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условие (C1) и равенство (4). Тогда для каждого простого собственного значения задачи*

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \omega, \qquad \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega. \tag{5}$$

существует единственное собственное значение λ_ε *задачи (1), (2), сходящееся к* λ_0 *при* $\varepsilon \to 0$. *Собственное значение* λ_ε *простое и имеет* *двупараметрическую асимптотику*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j(\eta), \tag{6}$$

где $\lambda_j(\eta)$ непрерывны по $\eta \in (0, \pi/2]$, $\lambda_j(\pi/2) = 0$, $j \geq 1$,

$$\lambda_1(\eta) = K_1 \ln \sin \eta, \quad K_1 = \int\limits_{\partial\omega} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}\right)^2 \frac{\mathrm{d}s}{\theta'}, \tag{7}$$

$$\lambda_2(\eta) = K_2 \ln^2 \sin \eta, \quad K_2 = \int\limits_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{\mathrm{d}s}{\theta'},$$

$$\lambda_j(\eta) = K_j \ln^j \eta + O(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}}), \quad \eta \to 0, \tag{8}$$

ψ_0 – нормирована в $L_2(\omega)$, K_j – некоторые константы, а функция ψ_{11} есть решение краевой задачи

$$-\Delta \psi_{11} = \lambda_0 \psi_j + K_1 \psi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad \psi_{11} = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega.$$

В условиях данной теоремы также получена асимптотика собственной функции ψ_ε, соответствующей λ_ε. Эта асимптотика в норме $H^1(\omega)$ имеет вид

$$\psi_\varepsilon(\mathsf{x}) = \psi_0(\mathsf{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(\mathsf{x}, \eta) + \chi(\tau/c_0) \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi, s, \eta).$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = \xi_1 = (\theta(s) - \theta(s_0^\varepsilon))\varepsilon^{-1} - (b(\varepsilon) - a(\varepsilon))/2$, $\xi_2 = \theta'(s)\tau\varepsilon^{-1}$, где τ – расстояние от точки до границы, измеренное в направлении внутренней нормали, $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1/4$ и нулю при $t > 3/4$ и принимающая значения из отрезка $[0, 1]$, c_0 – некоторое малое фиксированное число. Функции ψ_j и v_j определяются как решения некоторых рекуррентных систем краевых задач. В частности, $\psi_1 = \psi_{11} \ln \sin \eta$, $v_1 = -\frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}\Big|_{\partial\omega} X$, где

$$X = X(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \ln \left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 \eta} \right) - \xi_2, \quad z = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2. \tag{9}$$

Случай кратного предельного собственного значения изучен на примере единичного круга с центром в нуле со строго периодическим чередованием граничных условий. Хорошо известно, что на единичном круге задача (5) имеет двукратные собственные значения, которыми являются квадраты нулей функций Бесселя J_n целого порядка $n > 0$; соответствующие собственные функции имеют вид $\psi_0^{\pm}(\mathsf{x}) = J_n\left(\sqrt{\lambda_0} r\right) \Upsilon^{\pm}(n\theta)$, $\Upsilon^{+}(t) = \cos(t)$, $\Upsilon^{-}(t) = \sin(t)$. Здесь (r, θ) – полярные координаты, соответствующие x.

Теорема 2. *Пусть выполнены условие (C1) и равенство (4), ω – единичный круг с центром в нуле, $\theta(s) \equiv s$. Тогда для каждого двукратного собственного значения λ_0 задачи (5) существует единственное собственное значение λ_ε задачи (1), (2), сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$. Собственное значение λ_ε двукратное и имеет асимптотику (6), где $\lambda_j(\eta) \in C(0, \pi/2]$, $\lambda_j(\pi/2) = 0$, $j \geq 1$,*

$$\lambda_1(\eta) = 2\lambda_0 \ln \sin \eta, \qquad \lambda_2(\eta) = 2\lambda_0 \ln^2 \sin \eta, \tag{10}$$

$$\lambda_j(\eta) = \widetilde{K}_j \ln^j \eta + O(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}}), \quad \eta \to 0, \tag{11}$$

$\widetilde{K}_j$ – некоторые константы. Асимптотики соответствующих собственных функций в норме $H^1(\omega)$ имеют вид

$$\psi_\varepsilon^{\pm}(\mathsf{x}) = J_n(\sqrt{\lambda_\varepsilon} r)\Upsilon^{\pm}(n\theta) + \chi(1-r)\Big(\Upsilon^{\pm}(n\theta)\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{+}(\xi, \eta) \pm$$
$$\pm\, \Upsilon^{\mp}(n\theta)\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{-}(\xi, \eta)\Big).$$

Здесь под λ_ε понимается асимптотический ряд (6), $\xi_1 = \theta\varepsilon^{-1}$, $\xi_2 = (1-r)\varepsilon^{-1}$, $v_j^{\pm}$ – решения некоторой рекуррентной системы краевых задач, и, в частности, $v_1 = -\sqrt{\lambda_0} J_n'(\sqrt{\lambda_0}) X$, где X – из (9).

Отметим, что асимптотики из теорем 1, 2 для случая единичного круга и $\eta = const$ были получены в работах Р. Р. Гадыльшина. В случае переменного η и произвольной области Р. Р. Гадыльшиным был строго обоснован лишь первый член (7) асимптотики (6). Вопрос о полных асимптотиках в случае переменного η остался открытым. Случай переменной η существенно более сложен, чем случай $\eta = const$, так как необходимо выяснить характер зависимости коэффициентов от параметра η, что представляет собой совершенно самостоятельную и нетривиальную задачу. Решение этой задачи и, в частности, доказательство формул (8), (11) составляет самую сложную и ключевую часть первой главы. Отметим также, что непрерывность коэффициентов λ_j по η, формулы (8), (11) и условие (4) вместе обеспечивают асимптотичность ряда (5), несмотря на сингулярности коэффициентов λ_j при $\eta \to 0$.

В первом параграфе первой главы формально строятся асимптотические разложения для собственного значения λ_ε и соответствующей собственной функции ψ_ε в условиях теоремы 1. Данное построение проводится на основе комбинации метода составных разложений и метода многих масштабов. Пограничный слой, который строится на основе метода составных разложений, позволяет учесть микроструктуру граничных условий (2). В результате формального построения для функций пограничного слоя выводится рекуррентная система краевых задач, сингулярно зависящих от параметра η. Во втором параграфе проводится изучается зависимость от параметра η решения модельной краевой задачи для функций пограничного слоя. В третьем параграфе на основе результатов второго параграфа выясняется зависимость функций пограничного слоя от параметра η и устанавливается характер сингулярностей этих функций при $\eta \to 0$. Исследования второго и третьего параграфов составляют саму сложную и ключевую часть первой главы. В четвертом параграфе проводится обоснование формальных асимптотик, что завершает доказательство теоремы 1. Пятый параграф посвящен доказательству теоремы 2. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1: формальное построение асимптотик, исследование характера зависимости пограничного слоя от параметра η, обоснование асимптотик.

Вторая глава диссертации посвящена изучению задачи (1), (2) в случае принципиально непериодического чередования. Основной целью является выяснение максимально слабых ограничений на множество γ_ε, оставляющих возможность построить первые члены асимптотических разложений собственных элементов задачи (1), (2). Сформулируем эти ограничения в виде следующего условия.

(C2). Существуют функция $\theta_\varepsilon(s) : [0, S] \to [0, 2\pi]$ и положительная ограниченная функция $\eta(\varepsilon)$ такие, что для $j = 0, \ldots, N-1$

$$\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j, \quad c_3\eta(\varepsilon) \leq a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) \leq 2c_2^{-1}\eta(\varepsilon), \tag{12}$$

$\theta_\varepsilon(0) = 0$, $\theta_\varepsilon(S) = 2\pi$, $\theta'_\varepsilon \in C^\infty(\partial\omega)$, $0 < c_1 \leq \theta'_\varepsilon(s) \leq c_2$, где c_1, c_2, c_3 – некоторые положительные константы, c_1, c_2 не зависят от ε и

s, c_3 не зависит от ε, η и j. Выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} = -A \tag{13}$$

с $A = \mathrm{const} > 0$. Если $A > 0$, то при $\varepsilon \to 0$ функция $\theta_\varepsilon(s)$ сходится в $C^1[0, S]$ к некоторой функции $\theta_0(s)$, $\theta_0' \in C^\infty(\partial\omega)$. Норма $\|\theta_\varepsilon'\|_{C^3(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε.

Соотношения (12) более слабые по сравнению с равенствами (3). Геометрически равенства из (12) означают, что с помощью функции θ_ε точки $\{x_j^\varepsilon\}$ можно отобразить в периодическое множество точек, лежащее на единичной окружности. Более того, точку x_j^ε можно выбрать *произвольно* на множестве $\gamma_{\varepsilon,j}$, переопределив соответственно функции a_j и b_j. Неравенства из (12) означают, что длины множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ должны иметь одинаковый порядок малости при $\varepsilon \to 0$. Этот порядок малости описывается функцией η (в теоремах 1, 2 ввиду локальной периодичности чередования функция η описывала точные длины множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$). Равенство (13) и сходимость функции θ_ε при $A > 0$ призваны обеспечить усредненное второе либо третье краевое условие. Согласно полученным ранее результатам усреднения (Г. А. Чечкин, A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong) при выполнении условия (C2) собственные значения задачи (1), (2) сходятся к сохранением совокупной кратности к собственным значениям задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\theta_0'\right)\psi_0 = 0, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \tag{14}$$

где при $A = 0$ полагаем $\theta_0(s) \equiv s$. Для того, чтобы сформулировать основные результаты второй главы диссертации, нам понадобятся следующие вспомогательные обозначения. Функцию θ_ε продолжим на значения $s \in [-S, 2S)$ по правилу $\theta_\varepsilon(s) = \theta_\varepsilon(s - kS) + 2\pi k$, $s \in [kS, (k+1)S)$, $k = -1, 0, 1$. Обозначим:

$$d_j(\varepsilon) = \frac{a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, \quad d^j(\varepsilon) = \frac{\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon)) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon))}{2\varepsilon\eta(\varepsilon)},$$

Введем функцию $\mathsf{f}_\varepsilon(\theta)$ следующим образом:

$$\mathsf{f}_\varepsilon(\theta) = d^{j+1}(\varepsilon) - \chi\left((\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon))/(\varepsilon\pi)\right)(d^{j+1}(\varepsilon) - d^j(\varepsilon)),$$

при $0 \le \theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) \le \varepsilon\pi$, $j = 0, \ldots, N-1$.

Следующее утверждение доказывается в первом параграфе второй главы.

Лемма 1. *Пусть $A \geq 0$, функция $\theta'_\varepsilon(s) \in C^\infty(\partial\omega)$ равномерно по ε ограничена в норме $C(\partial\omega)$ и для $A > 0$ имеет место сходимость $\|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\omega)} \to 0$. Тогда для каждого простого собственного значения λ_0 задачи (14) существует единственное и простое собственное значение задачи*

$$-\Delta\Psi_0 = \Lambda_0\Psi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A+\mu)\theta'_\varepsilon\right)\Psi_0 = 0, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega,$$

сходящееся к λ_0 при $(\varepsilon, \mu) \to 0$. Для соответствующим нормированных в $L_2(\omega)$ собственных функций имеет место сильная в $H^1(\omega)$ сходимость $\Psi_0 \to \psi_0$. Собственное значение $\Lambda_0(\mu, \varepsilon)$ и соответствующая собственная функция $\Psi_0(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon)$ голоморфны по μ (последняя – в норме $H^1(\omega)$).

Основными результатами второй главы диссертации являются следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (C2) и равенство*

$$\max_j |d_{j+1}(\varepsilon) - d_j(\varepsilon)| = o(\varepsilon^{1/2}(A+\mu)^{-1}), \tag{15}$$

где $\mu = \mu(\varepsilon) = -\left(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon)\right)^{-1} - A$. Тогда для каждого собственного значения λ_0 задачи (14) существует единственное сходящееся к нему собственное значение λ_ε задачи (1), (2). Это собственное значение простое и имеет следующую двупараметрическую асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu, \varepsilon) + o(\varepsilon(A+\mu)),$$
$$\Lambda_1(\mu, \varepsilon) = (A+\mu)^2 \int\limits_{\partial\omega} \left(\Psi_0(\mathsf{x}, \mu, \varepsilon)\right)^2 \ln \mathsf{f}_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\theta'_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s,$$

где Λ_0 и Ψ_0 удовлетворяют утверждению леммы 1. Функция Λ_1 неположительна и голоморфна по μ.

В следующей теореме приведены асимптотики собственных значений возмущенной задачи в случае нарушения равенства (15) и сохранения остальных условий теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (C2). Тогда для каждого собственного значения λ_0 задачи (14) существует единственное сходящееся к нему собственное значение λ_ε задачи (1), (2). Собственное значение λ_ε простое и имеет следующую двупараметрическую асимптотику:*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \mu \int\limits_{\partial\omega} (\psi_0(\mathsf{x}))^2 \theta'_\varepsilon(s)\mathrm{d}s + O\left(\mu^2 + \mu\varepsilon^{3/2} + A(\sigma_\varepsilon + \varepsilon^{1/2})\right), \qquad (16)$$

где $\sigma_\varepsilon = \|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\omega)}$.

Асимптотика (16) конструктивна при $A = 0$, а в случае $A > 0$ – при $\sigma_\varepsilon + \varepsilon^{1/2} = o(\mu)$.

Помимо асимптотик собственных значений, в диссертации в условиях теорем 3, 4 также построены и асимптотические разложения соответствующих собственных функций. Эти асимптотики выполнены в смысле нормы $H^1(\omega)$. Мы не приводим здесь этих асимптотик ввиду достаточной громоздкости формул и необходимости вводить дополнительные вспомогательные обозначения.

Схема доказательства теорем 3, 4 в целом схожа со схемой доказательства теорем 1, 2. В первом параграфе второй главы демонстрируются основные идеи формального построения асимптотических разложениях в условиях теорем 3, 4, позволяющие учесть непериодическую структуру чередования. Помимо метода составных разложений и метода многих масштабов в построении используется и метод согласования асимптотических разложений. На основе последнего строится внутреннее разложение, которое вместе и пограничным слоем позволяет удовлетворить требуемым граничным условиям. Используемая здесь схема построения является нетривиальным обобщением схемы, использованной ранее Р. Р. Гадыльшиным для изучения периодической и локально периодической смены граничных условий. Второй параграф посвящен построению дополнительных вспомогательных членов асимптотик и исследованию зависимости коэффициентов построенных асимптотик от ε и μ. В третьем параграфе проводится обоснование асимптотических разложений, что завершает доказательство теорем 3, 4.

Третья глава диссертации посвящена изучению трехмерной краевой задачи с частым периодическим чередованием граничных условий. Постановка задачи такова. Пусть $x = (\mathsf{x}, x_3)$ и $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$ – двух- и трехмерные декартовы координаты, $\Omega = \omega \times [0, H]$, где ω, напомним, произвольная односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с бесконечно дифференцируемой границей, s – натуральный параметр кривой $\partial\omega$. Через Σ обозначим боковую поверхность цилиндра Ω, через ω_1 и ω_2 – верхнее и нижнее основания соответственно, $\omega_1 = \{x : \mathrm{x} \in \partial\omega, x_3 = H\}$, $\omega_2 = \{x : \mathrm{x} \in \partial\omega, x_3 = 0\}$. Малый параметр введем следующим образом: $\varepsilon = H/(\pi N)$, где $N \gg 1$ – натуральное число. Боковую поверхность разобьем на два подмножества γ^ε и Γ^ε, определив эти подмножества как объединение большого числа узких полос: $\gamma^\varepsilon = \{x : \mathrm{x} \in \partial\omega, |x_3 - \varepsilon\pi(j + 1/2)| < \varepsilon\eta \mathrm{g}_\varepsilon(s), j = 0, \ldots, N-1\}$, $\Gamma^\varepsilon = \Sigma \setminus \overline{\gamma}^\varepsilon$ (см. рис. 2). Здесь $\eta = \eta(\varepsilon)$ – произвольная функция, принимающая значения из интервала $(0, \pi/2)$, $\mathrm{g}_\varepsilon \in C^\infty(\partial\omega)$ – произвольная функция, удовлетворяющая оценке $0 < c_4 \leq \mathrm{g}_\varepsilon(s) \leq 1$ с константой c_4, не зависящей от ε и s. Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \tag{17}$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \gamma^\varepsilon, \qquad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma^\varepsilon, \tag{18}$$

где ν - внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

В первом параграфе третьей главы на основе идей, применявшихся ранее различными авторами для выяснения вида усредненных задач, изучается сходимость задачи (17), (18) и доказывается

Теорема 5. *Пусть норма $\|\mathrm{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε, а для функции η выполнено одно из равенств (4), (13). Тогда собственные значения задачи (17), (18) сходятся к собственным значениям одной из предельных задач:*

$$\begin{gathered} -\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \\ \psi_0 = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \Sigma, \qquad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \end{gathered} \tag{19}$$

если для η выполнено равенство (4), и

$$\begin{gathered} -\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \qquad \psi_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\right)\psi_0 = 0, \quad x \in \Sigma, \end{gathered} \tag{20}$$

если для η выполнено равенство (13). Совокупная кратность собственных значений возмущенной задачи, сходящихся к одному и тому же *предельному собственному значению, совпадает с кратностью этого предельного собственного значения. Для всякой собственной функции ψ_0, соответствующей собственному значению λ_0, существует сходящаяся к ней линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи, соответствующих собственным значениям, сходящимся к λ_0. Эта сходимость – сильная в $H^1(\Omega)$, если предельная – задача (19) или (20) с $A = 0$, и сильная в $L_2(\Omega)$ и слабая в $H^1(\Omega)$, если предельная – задача (20) с $A > 0$.*

Прежде чем сформулировать основные результаты третьей главы, введем дополнительные обозначения. Задачи (19), (20) легко решаются разделением переменных: $\lambda_0 = M^2 + \varkappa$, $\psi_0(x) = \phi_0(\mathsf{x}) \cos Mx_3$, где $M = \pi(m + 1/2)H^{-1}$, $m \geq 0$ – целое число, $\varkappa$ и ϕ_0 – собственные элементы двумерной задачи

$$-\Delta_{\mathsf{x}}\phi_0 = \varkappa\phi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad \phi_0 = 0, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \tag{21}$$

– для задачи (19) и

$$-\Delta_{\mathsf{x}}\phi_0 = \varkappa\phi_0, \quad \mathsf{x} \in \omega, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \mathsf{v}} + A\right)\phi_0 = 0, \quad \mathsf{x} \in \partial\omega, \tag{22}$$

– для задачи (20). Здесь v – внешняя нормаль к $\partial\omega$.

Сформулируем теперь основные результаты третьей главы диссертации.

Теорема 6. *Пусть выполнено равенство (4) и существует $c_5 > 0$, такое что норма Гельдера $\|\mathsf{g}_\varepsilon\|_{C^{2+c_5}(\partial\omega)}$ ограничена по ε. Тогда собственные значения λ_ε задачи (17), (18), сходящиеся к простым собственным значениям λ_0 задачи (19), имеют следующие двупараметрические асимптотики:*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(\eta, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2} + 1)\right),$$
$$\lambda_1(\eta, \varepsilon) = \int\limits_{\partial\omega} \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\mathsf{v}}\right)^2 \ln\sin\eta\mathsf{g}_\varepsilon\, \mathrm{d}s,$$

где $\|\phi_0\|_{L_2(\omega)} = 1$.

Следующая лемма доказывается в третьем параграфе третьей главы.

Лемма 2. *Для каждого простого собственного значения $\varkappa$ задачи (22) существует единственное и простое собственное значение задачи*

$$-\Delta_{\mathsf{x}}\Phi_0 = \mathcal{K}\Phi_0, \quad \mathsf{x}\in\omega, \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathsf{v}} + A + \mu\right)\Phi_0 = 0, \quad \mathsf{x}\in\partial\omega, \tag{24}$$

сходящееся к $\varkappa$ при $\mu \to 0$. Для соответствующим нормированных в $L_2(\omega)$ собственных функций имеет место сильная в $H^1(\omega)$ сходимость $\Phi_0 \to \phi_0$. Собственное значение $\mathcal{K}(\mu)$ и соответствующая собственная функция $\Phi_0(\mathsf{x},\mu)$ голоморфны по μ (последняя – в норме $H^1(\omega)$).

Теорема 7. *Пусть выполнено равенство (13) для функции η и норма $\|\mathsf{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε. Тогда собственные значения λ_ε задачи (17), (18), сходящиеся к простым собственным значениям λ_0 задачи (20), имеют следующие двупараметрические асимптотики:*

$$\begin{aligned}
&\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon\Lambda_1(\mu,\varepsilon) + \varepsilon^2\Lambda_2(\mu,\varepsilon) + O(\varepsilon^3(A+\mu)),\\
&\Lambda_1(\mu,\varepsilon) = (A+\mu)^2\int\limits_{\partial\omega}\Phi_0^2\ln\mathsf{g}_\varepsilon\,\mathrm{d}s,\\
&\Lambda_2(\mu,\varepsilon) = (A+\mu)^2\int\limits_{\partial\omega}\left(\Phi_0\Phi_1\ln\mathsf{g}_\varepsilon - \frac{\pi^2}{24}\mathsf{k}\Phi_0^2\right)\mathrm{d}s+\\
&\qquad\qquad + (A+\mu)^3\int\limits_{\partial\Omega'}\Phi_0^2\ln^2\mathsf{g}_\varepsilon\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

где $\Lambda_0 = \mathcal{K}(\mu)+M^2$, $\mathcal{K}$ и Φ_0 удовлетворяют лемме 2, причем $\mathcal{K}$ выбрано из условия $\mathcal{K}(\mu)\xrightarrow[\mu\to 0]{}\varkappa$. Функция $\Phi_1 = \Phi_1(\mathsf{x},\mu,\varepsilon)$ – решение задачи

$$\begin{aligned}
&-\Delta_{\mathsf{x}}\Phi_1 = \mathcal{K}\Phi_1 + \Lambda_1\Phi_0, \quad \mathsf{x}\in\omega,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial \mathsf{v}} + A + \mu\right)\Phi_1 = -(A+\mu)^2\Phi_0\ln\mathsf{g}_\varepsilon, \quad \mathsf{x}\in\partial\omega,
\end{aligned}$$

удовлетворяющее условию ортогональности $(\Phi_0,\Phi_1)_{L_2(\omega)} = 0$, $\mathsf{k}(s) = -(\mathsf{r}''(s),\mathsf{v}(s))_{\mathbb{R}^2}$, $\mathsf{v}=\mathsf{v}(s)$, $\mathsf{r}(s)$ – двумерная вектор-функция, задающая $\partial\omega$. Функции Λ_i, Φ_i голоморфны по μ (последние – в норме $H^1(\omega)$).

Наряду с асимптотиками собственных значений, в третьей главе диссертации в условиях теорем 6, 7 также построены и асимптотические разложения соответствующих собственных функций. Данные асимптотические разложения имеют место в норме $H^1(\omega)$. Мы не приводим здесь этих асимптотик из-за достаточной громоздкости формул и необходимости вводить дополнительные вспомогательные обозначения.

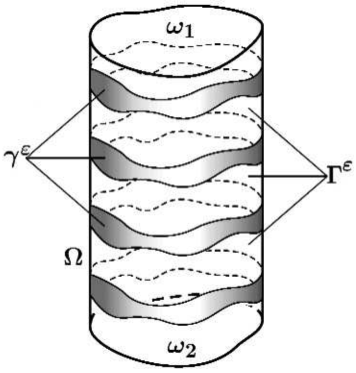

Рисунок 2.

Схема доказательства теорем 6, 7 в целом схожа с доказательством теорем 1-4. Формальные построения асимптотик в условиях теорем 6, 7 проводятся во втором и третьем параграфах соответственно. В случае усредненной задачи (19) в формальном построении оказывается достаточным использованием лишь метода составных разложений и метода многих масштабов. В случае усредненной задачи (20) в формальном построении дополнительно с упомянутыми методами используется также и метод согласования асимптотических разложений. Четвертый параграф посвящен обоснованию формальных асимптотических разложений, что завершает доказательство теорем 6, 7.

Выражаю самую искреннюю благодарность моему научному руководителю Гадыльшину Рустему Рашитовичу за постановку задач, внимание и помощь на протяжении всей работы над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Борисов Д. И., Гадыльшин Р. Р. О спектре Лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий // ТМФ. – 1999. – Т. 118. № 3. – С. 347–353.

[2] Борисов Д. И. О двупараметрической асимптотике в одной краевой задаче для Лапласиана // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. Вып. 4. – С. 520-534.

[3] Борисов Д. И. О Лапласиане с часто и непериодически чередующимися граничными условиями // Доклады АН. – 2002. – Т. 383. № 4. – С. 443-445.

[4] Борисов Д. И. Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий // Вестник молодых ученых. Серия прикладная математика и механика. – 2002. – Вып. 1. – С. 32-52.

[5] Борисов Д. И. О сингулярно возмущенной краевой задаче для Лапласиана в цилиндре // Дифф. уравнения. – 2002. – Т. 38. № 8. – С. 1071-1078.

[6] Борисов Д. И. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Мат. сборник. – 2002. – Т. 193. Вып. 7. – С. 37-68.

[7] Borisov D. I. The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions // C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb. – 2001. – t. 329. №10. – P. 717-721.

[8] Borisov D. I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asympt. Anal. – 2003. – V. 35. № 1. – P. 1-26.

Борисов Денис Иванович

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ЧАСТОЙ
СМЕНОЙ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 23.05.2003 г. Бумага офсетная. Формат 60x84/16.
Гарнитура Times. Отпечатано на ризографе.
Усл.печ. л. 0,98. Уч.-изд.л. 1,00. Тираж 100 экз. Заказ 320.

Редакционно-издательский отдел
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г.Уфа, ул.Фрунзе, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г.Уфа, ул.Фрунзе, 32.